

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT (Paris 7)

ÉCOLE DOCTORALE : *PARTICULES, NOYAUX ET COSMOS (ED517)*

DOCTORAT

Champs, particules, matière

présentée par

Alexandre Giraud

Phénomènes hors équilibre dans l'Univers inflationnaire en
théorie quantique des champs

Thèse dirigée par : Julien Serreau

Soutenue le 16 Mars 2010

JURY

M. JOYCE Michael	
M. PARENTANI Renaud,	Président
M. PATKÓS András,	Rapporteur
M. PROKOPEC Tomislav,	Rapporteur
M. REINOSA Urko	
M. SALATI Pierre	
M. SERREAU Julien	

Abstract

Le cadre général de ce travail de thèse est celui de la cosmologie primordiale de l'inflation. Le modèle standard de la cosmologie explique, avec un bon accord théorie-expérience, l'essentiel de nos observations. Cependant, afin de faire la transition entre l'inflation et le scénario du Big-Bang, le *reheating* est une phase qui permet la production de matière par désintégration de l'inflaton.

L'inflation et le *reheating* ont été longuement traités dans les études passées. Les nombres d'occupation qui découlent de la plupart des modèles sont si grand que l'approximation classique est encore ce qui se fait de mieux aujourd'hui. Elle permet d'étudier autant la phase de production que le régime des collisions. Cependant elle ne peut décrire la thermalisation des particules créées et se limite uniquement aux champs scalaires. Les traitements quantiques existent mais se limitent pour la plupart aux approximations de champ-moyen ne permettant pas d'étudier le régime des collisions et encore moins la thermalisation. Néanmoins ils ont pour avantage de donner une description quantique du *reheating* permettant notamment l'inclusion de degrés de liberté fermioniques. Au-delà de cette approximation il existe assez peu de travaux, et c'est dans ce cadre que se situe cette thèse.

J'utilise des techniques de la théorie quantique des champs hors-équilibre développées essentiellement dans le cadre de la physique des particules, pour décrire de manière complète cohérente et quantique la physique de la production de la matière et sa thermalisation. Les techniques d'action effective *2-Particle-Irreducible* nous permettent d'établir les équations du mouvement du système et, combinées à un développement non-perturbatif, nous permettent également d'explorer les temps où les grands nombres d'occupation, allant comme l'inverse du couplage, rendent invalide tout développement perturbatif.

Dans une première partie, j'étudie la physique du *reheating* avec couplage "inflaton-matière" trlinéaire. L'inflaton est toujours représenté par un champ scalaire à valeur moyenne dans le vide non-nulle alors que la matière est premièrement modélisée par N champs scalaires de symétrie $\mathcal{O}(N)$, à valeur moyenne dans le vide nulle, puis, par N champs fermioniques de symétrie $SU(N)$. Dans les deux cas nous irons au *Next-to-Leading Order* d'un développement non-perturbatif en $1/N$, ordre le plus bas permettant de capturer la physique des collisions et de la thermalisation.

Dans une deuxième partie, j'étudie la physique de la décohérence des fluctuations primordiales, ou comment se fait la transition quantique-classique dans l'histoire de l'Univers. Pour cela, nous utilisons ce même formalisme, ici formulé pour des champs scalaires à valeur moyenne dans le vide nulle. Nos conditions de travail dépassent le cadre de la cosmologie, s'appliquant plus généralement à la question de la décohérence d'un état pur. Les résultats obtenus sont inédits et font l'objet de nouvelles directions de recherche.

Table des matières

I	Reheating	11
1	<i>Reheating</i> scalaire	15
1.1	Modèle $O(N)$ avec interaction trilinéaire	15
1.2	Action effective et équations du mouvement	18
1.3	Développement en $1/N$ et approximation <i>Next-to-Leading Order</i>	20
1.3.1	Expression de Γ_2	21
1.3.2	Calcul des <i>self-energies</i>	23
1.4	Décomposition spectrale et équations du mouvement	24
1.5	Espace de Fourier	26
1.6	Conditions initiales	28
1.7	Densité d'énergie et de pression	31
1.7.1	Densité d'énergie du modèle $O(N)$	31
1.7.2	Conservation de l'énergie	33
1.7.3	Densité de pression	34
1.8	Implémentation numérique	35
1.8.1	Discrétisation spatiale	35
1.8.2	Discrétisation temporelle	36
1.8.3	Conservation de l'énergie	38
1.9	Résultats	39
1.9.1	Approximation <i>Hartree</i>	39
2	<i>Reheating</i> fermionique	49
2.1	Modèle σ -linéaire $SU(N)$	50
2.2	Action effective et équation du mouvement	51
2.3	Décompositions	53
2.3.1	Décomposition spectrale	53
2.3.2	Décomposition de Lorentz	53
2.4	Exploitation des symétries	55
2.4.1	Invariance par parité (P)	56
2.4.2	Invariance par conjugaison de charge (C)	58
2.5	Développement en $1/N$ et approximation <i>Next-to-Leading Order</i>	59
2.5.1	Expression de Γ_2	59
2.5.2	Calcul des self-energies	61
2.6	Equations du mouvement	61
2.6.1	Secteur bosonique	62
2.6.2	Secteur fermionique	63
2.6.3	Espace de Fourier	63
2.7	Renormalisation $2PI$ hors-équilibre	65
2.8	Conditions initiales	67

2.8.1	Secteur bosonique	67
2.8.2	Secteur fermionique	69
2.9	Densité d'énergie et de pression	71
2.9.1	Densité d'énergie	71
2.9.2	Densité de pression	73
2.10	Implémentation numérique	73
2.10.1	Produit de convolution	74
2.10.2	Discrétisation <i>Leap-frog</i> des fermions	74
2.10.3	Discrétisation spatiale	75
2.11	Résultats	76
2.11.1	Approximation de champ moyen	76
2.11.2	Perspectives	82
II	Décohérence	87
3	Décohérence d'un état pur	89
3.1	Le modèle $O(N)$ avec interaction quartique	90
3.2	Mesure de la cohérence/décohérence	93
3.3	Préparation d'un état cohérent et conditions initiales	96
3.4	Résultats et interprétation	97
3.4.1	Un condensat sans environnement extérieur	98
	Conclusions et perspectives	131
	Annexes	135
A	Expression des <i>self-energies</i> dans le <i>reheating</i> bosonique	135
B	Adiabaticité pour les fermions	136
B.1	Approximation d'ordre 0	137
B.2	Approximation d'ordre 1	138
C	Adiabaticité pour les bosons	139
C.1	Approximation d'ordre 0	140
C.2	Approximation d'ordre 1	141
D	Relations entre propagateurs fermioniques et fonctions modes	141
E	Théorie libre	142
E.1	Secteur bosonique	142
E.2	Secteur fermionique	142
F	Théorie libre discrète	143
F.1	Secteur bosonique	143
F.2	Secteur fermionique	144
G	Equations du mouvement pour les fermions et self-energies	145
G.1	Equations du mouvement pour les fermions	145
G.2	Selfs-energies pour les fermions	146
G.3	Selfs-energies pour les bosons	147
H	Renormalisation via les dérivées du potentiel effectif static à une boucle	147
I	Preuve $0 \leq N_f(t; k) \leq 1$	151
J	Rotation de Bogolubov et phase ϕ_k	152

Introduction

L'Univers dans lequel nous vivons est le plus grand système hors-équilibre connu et ceci à toutes ses échelles de longueur. L'idée d'un Univers non-statique a conduit A. Einstein à introduire une constante dans ses équations. Cependant les observations de E. Hubble, en 1929, l'ont mené à conclure que notre Univers n'est pas un système statique immuable mais sa "taille" semble croître avec le temps tel un ballon qui se gonfle d'air. Cette loi conduit naturellement à la théorie du *Big-Bang* qui stipule uniquement que *l'Univers étant en expansion il existe un instant dans le passé où tout son contenu se concentre en un espace infiniment petit*.

Dans les années soixante, les deux physiciens A.A. Penzias et R.W. Wilson (Prix Nobel de physique en 1978) découvrent le fond diffus cosmologique (CMB) prédit par R. Alpher, R. Herman et G. Gamow dans les années quarantes en 1940 comme conséquence du *Big-Bang*. Ce fond a été émis lorsque que la densité de l'Univers fut suffisamment basse pour libérer les photons du plasma de matière. Il est l'empreinte électromagnétique la plus ancienne que nous ne pourrions jamais avoir de notre Univers. Il représente donc la seule source d'information connue à ce jour permettant de contraindre tout ce qui peut être dit sur l'Univers avant son émission. Il en ressort que l'Univers est homogène et isotrope à grande échelle. Cependant, la théorie du *Big-Bang* ne peut expliquer ces deux propriétés sur l'ensemble de l'Univers tout en conservant la causalité des événements. Pour combler ce manque, A. Guth [1] publie en 1981 la théorie de l'*inflation* permettant de pallier les difficultés que rencontre la théorie du *Big-Bang* à cette époque (voir les revues [2, 3] ainsi que ses références). De plus, elle prévoit que les fluctuations relatives à cette homogénéité doivent être très petites. La mesure, par le Satellite COBE, lancé en 1989, de ces fluctuations confirme cette prédiction et contraint certains paramètres des modèles établis. Depuis, la communauté ne cesse de porter un intérêt grandissant à cette "photo" ancestrale de l'Univers en l'analysant plus précisément avec WMAP (lancé en 2001) et plus récemment avec le satellite européen PLANCK (lancé en 2009). La théorie de l'inflation prévoit également l'invariance d'échelle du spectre de puissance ainsi que ses pics acoustiques, le caractère gaussien des fluctuations et bien d'autres choses. Ces prédictions sont aujourd'hui vérifiées et leur mesure contraint de plus en plus les valeurs permises des paramètres.

Cependant il reste à faire la jonction entre la fin de l'inflation et le début du modèle standard de la cosmologie Λ CDM. L'inflation permet à l'Univers de croître exponentiellement vite avec le temps alors que le modèle Λ CDM rappelle que l'Univers est aujourd'hui essentiellement constitué d'énergie noire, et de matière noire non-relativiste (d'où le terme *COLD Dark Matter*) avec constante cosmologique Λ (rétablie pour d'autre raisons que celles initialement introduites par A. Einstein). Afin de raccorder ces deux modèles, et comprendre la transition de l'inflation à l'ère de matière que nous vivons aujourd'hui (passant par une ère dominée par la radiation), intervient une phase de *reheating* pendant laquelle l'énergie responsable de l'inflation se transforme en matière. Cette production de matière par transfert d'énergie conduit toute la première partie de mes travaux dans la suite

de ceux effectués depuis l'établissement des premiers modèles d'inflation [4, 5, 6] (pour une vision globale voir les ouvrages [7, 8] et la revue [9]).

L'inflation permet également d'étudier la transition du quantique vers le classique des fluctuations primordiales. Les fluctuations quantiques présentes deviennent, par un effet de courbure d'espace-temps, des fluctuations quasi-classiques [10]. Au delà du contexte cosmologique, cette question porte plus généralement sur la décohérence d'un état pur. La question fait l'objet de plusieurs travaux en cosmologie [10, 11, 12, 13, 14] et dans d'autres domaines de la physique [15, 16, 17, 18, 19, 20]. Je consacre la dernière partie de ma thèse à progresser dans la compréhension du problème de la décohérence d'un état pur sans me restreindre à l'étude des fluctuations quantiques primordiales mais en adoptant un point de vue plus général en physique. Cette étude trouve sa place à la suite de celle sur le *reheating* car la matière produite lors de celui-ci n'est que l'interprétation particuliste des fluctuations primordiales.

En ce qui concerne le *reheating* les traitements quantiques existants se limitent le plus souvent à une étude du régime linéaire [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27], au mieux à celui du champ-moyen [28, 29, 30, 31, 32, 33, 34]. Néanmoins les nombres d'occupation suffisamment grands permettent une très bonne approximation classique [35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43]. Certains d'entre eux étudient amplement le régime des collisions dans le cadre du *reheating* scalaire avec une excellente précision. L'approximation classique ne permet pas l'étude des temps très long décrivant la thermalisation du système. Cependant les travaux récents en théorie quantique des champs hors-équilibre [44, 45, 46, 47] montrent que l'étude quantique en champ-moyen introduit spurieusement un nombre infini de quantités conservées rendant cette approximation incorrecte dès ses premiers instants. Quelques travaux allant au delà de cette approximation [48, 49, 50, 51, 52, 53] incluent un traitement quantique complet permettant l'étude de la thermalisation dans la dynamique du système. Mon travail, original dans le contexte de la cosmologie, porte sur l'étude du *reheating* non-perturbatif aussi bien bosonique que fermionique dans le cas où l'inflaton est couplé à la matière via une interaction trilineaire à l'ordre sous-dominant d'un développement à grand nombre de champs.

En ce qui concerne la question de la décohérence, l'approche en théorie quantique des champs a déjà été employée dans les références [54, 55]. Dans ce cadre, j'établi au cour de mon étude une formulation quantitative du problème de la décohérence en théorie des champs au delà de l'approximation de champ-moyen.

Pour des raisons de simplification et de mise en relief des effets à observer, nous omettrons volontairement l'expansion de l'Univers. Dans la première partie on peut justifier que la fin de l'inflation advient lorsque l'expansion de l'Univers est une puissance positive du temps et que le phénomène de production de particules est suffisamment rapide pour ne pas trop ressentir cette expansion. Dans la deuxième partie, la décohérence, la validité de cette omission est plus contestable mais se justifie pour la simplicité de l'étude et la diversité de domaines physiques qu'elle peut atteindre dans ces conditions. Nous travaillerons donc toujours en espace minkowskien.

Les deux volets de cette thèse ont, au delà du point commun de la cosmologie, un fil rouge particulier puisqu'il s'agit toujours d'une étude où les phénomènes quantiques ne peuvent être négligés. Pour les décrire j'utilise les méthodes d'action effective $2PI$ développées par les références [56, 57, 58, 59, 60] dans un contexte plus axé sur la physique des particules. L'utilisation de ces méthodes permet de contourner les problèmes de la théorie quantique des champs traditionnelle quand elle est appliquée à un système hors de son état d'équilibre. Ces problèmes sont notamment la sécularité et l'Universalité. Dans le cadre

d'une théorie des champs conventionnelle, on se rend compte que les quantités qu'on développe en série présentent une sécularité. Donc il existera toujours un temps suffisamment long pour que, quelle que soit la petitesse du paramètre de développement, l'approximation échoue. L'action effective $2PI$ hors-équilibre contourne ce problème en développant en série le paramètre en question et non la quantité sommée [47]. Quand bien même on pourrait trouver des méthodes pour contourner ce problème tout en gardant une théorie des champs conventionnelle, on se rend compte que l'état final n'est pas universel. En effet, l'état thermique, final, ne doit dépendre que de quelques quantités conservées de la théorie comme l'énergie totale. Les détails de l'état initial doivent être perdus au cours du temps. Le système doit présenter une mémoire finie de ses conditions initiales. Ce problème est résolu en utilisant l'action effective $2PI$ qui, tenant compte des effets de collisions, mémoires et effets hors couche de masse, permet au système d'évoluer vers un état thermique insensible à ses conditions initiales [44, 45, 61, 46, 47].

Le prix à payer pour l'utilisation de ces méthodes est la difficulté à résoudre analytiquement les équations du mouvement obtenues sans invoquer d'autre approximation détruisant les caractères recherchés dans ces méthodes. Pour obtenir des résultats, nous devons implémenter numériquement ces équations du mouvement. Cette implémentation numérique constitue une partie importante du travail réalisé lors de cette thèse.

Le premier chapitre de la partie concernant le *reheating* est consacré exclusivement à l'étude des champs scalaires contrairement au deuxième chapitre où la matière est modélisée par des champs de nature fermionique. L'étude traitant la décohérence ne se fera que pour des champs scalaires, ajournant les subtilités fermioniques à une étude ultérieure. Dans chaque chapitre, j'établis un modèle permettant d'étudier le *reheating* dont je déduis les équations du mouvement en utilisant les méthodes fonctionnelles citées ci-dessus. Ces équations sont implémentées numériquement selon un schéma adapté à l'étude effectuée. Dans le cas de la décohérence, les résultats obtenus sont originaux, n'apparaissant, à ma connaissance, dans aucune étude passée.

Je termine ce mémoire par une conclusion reprenant les principaux résultats obtenus pendant ma thèse et ouvrant à des perspectives pour la continuation de ces travaux.

Première partie

Reheating

Introduction au *reheating*

Le *reheating* (de l'anglais voulant dire réchauffement) désigne originellement la transition d'un Univers "froid" à un Univers dit "chaud". Ceci paraît en contradiction avec le modèle standard de la cosmologie qui inclut de la matière noire froide mais il s'agit simplement de deux choses bien différentes. Le deuxième parle d'une matière noire non relativiste alors que le premier exprime non pas la température de l'Univers mais le fait qu'à la fin de l'inflation celui-ci concentre toute son énergie dans un seul mode : l'inflaton. Réchauffement veut donc dire comment l'Univers passe d'un tel état à un état où l'énergie est répartie en particules de matière dont le spectre répond à une distribution thermique définissant ainsi une température [7, 8].

La problématique de cette ère de l'histoire de l'Univers est donc la compréhension de la production et la thermalisation de toute la matière présente dans notre Univers. Cette phase est la pierre angulaire de la théorie de l'inflation. Malgré ses succès avérés (homogénéités, fluctuations, spectre de puissance) et ceux qui pourront bientôt le devenir (polarisation du CMB, effets des non-gaussianités...). Elle n'explique pas comment l'inflation prend fin et comment cette énergie est transformée en matière puis comment celle-ci thermalise pour donner lieu aux scénarios testables de la nucléosynthèse. Même si ces derniers sont loin d'être aboutis et convergents, ils constituent une majeure contrainte à la dynamique du *reheating* et plus généralement aux modèles d'inflation. L'analyse de plus en plus détaillée du fond diffus cosmologique (COBE, WMAP, PLANCK...) est une autre contrainte majeure à cette problématique.

Cette problématique est étudiée déjà depuis quelques années. Premièrement elle a été étudiée dans le cas de la production de matière de nature scalaire. Les études quantiques à ce sujet [28, 29, 30, 31, 32, 33, 34] se sont limitées principalement à l'approximation de champ-moyen. La raison à cela est que pour aller au delà il faut des méthodes d'action effectives intégrant les effets quantiques telle $2PI$. Ces analyses ont cependant donné des résultats encourageant la poursuite dans cette direction notamment concernant la question de la thermalisation qui ne peut être traitée à cet ordre d'approximation. Lors de ces travaux il a été montré par exemple que l'expansion de l'Univers joue un rôle crucial en bloquant les phénomènes de production de particules basées sur les oscillations périodiques du champ macroscopique [24]. Pour ces raisons, certains modèles produisent des particules sans résonance paramétrique [25, 48, 42, 34].

De plus récents travaux concernent la production de matière de nature fermionique. Sa présence est la seule, pour l'heure, indispensable à la reproduction du modèle standard de la physique des particules. Les quelques travaux [62, 26, 63, 27, 64, 65, 66, 67] ont étudié cette question dans le cas, au mieux, de l'approximation de champ-moyen. Certains d'entre eux [62, 27] ont conclu que contrairement à ce qui a été cru, les fermions peuvent avoir un rôle important dans la dynamique du *reheating*, souvent par modification de la production de la matière bosonique.

Ces études, de part leur approximation, se sont uniquement focalisées sur la production de la matière laissant de côté la question de la thermalisation.

L'originalité de mon travail consiste à reprendre les techniques employées en théorie quantique des champs hors-équilibre non-perturbative [44, 61, 46, 47] pour entre-ouvrir une nouvelle porte au paysage du *reheating* permettant principalement de décrire d'un bloc cohérent la production et la thermalisation de la matière dans l'Univers primordial. Ce travail est néanmoins réalisé avec un contenu en champs infiniment simplifié par rapport à la diversité connue aujourd'hui en physique des particules. Son ambition n'étant pas de répondre à la question d'un *reheating* réaliste mais simplement de comprendre le rôle des collisions dans la production de matière.

Dans cette partie je sépare le travail en deux chapitres. Premièrement j'étudie un *reheating* purement scalaire où inflaton (que nous appellerons $\hat{\phi}$) et matière sont deux champs différents, interagissant via un couplage trilinéaire comme le suggèrent les travaux [39, 48, 42] pour augmenter l'efficacité de production. Le deuxième chapitre concerne un *reheating* fermionique où l'inflaton se couple à la matière via une interaction de Yukawa [62, 27]. Ce couplage est le plus simple possible permettant de modéliser l'interaction entre un champ scalaire et un champ fermionique tout en étant renormalisable. Dans ces deux chapitres j'établis le modèle permettant d'aboutir aux équations du mouvement de la théorie hors-équilibre pour les implémenter sur un ordinateur. Les résultats obtenus sans termes de collisions sont en accord avec [42] pour le modèle entièrement scalaire, et [62, 27] pour le modèle fermionique.

Chapitre 1

Reheating scalaire

L'étude du *reheating* scalaire a une longue histoire essentiellement composée de traitements classiques, intégrant les effets de collisions de la matière créée [35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43]. Les effets quantiques type champs-moyen ont également été étudiés dans les références [28, 29, 30, 31, 32, 33, 34] mais au-delà de cette approximation il existe peu de travaux [49, 50, 51, 52]. Ces études montrent l'échec de certains modèles à transformer totalement l'énergie de l'inflaton en matière. Les travaux récents [34, 42, 43, 48] montrent que l'utilisation d'une théorie tachyonique permet un transfert plus efficace.

Dans ce chapitre nous verrons comment un tel modèle prend forme dans le cadre des méthodes employées dans la référence [45]. La méthode de l'action effective *2-Particule-Irreductible* associée à un développement en $1/N$ (où N représente le nombre de champs de matière) constitue un outil très puissant pour établir les équations du mouvement de la dynamique quantique du système. Ce développement nous permet de travailler dans le régime des couplages forts sans perdre la validité de l'approximation. De plus, la densité de particules étant très grande, il faut travailler avec une approximation non-perturbative telle que ce développement. Ceci justifie son emploi tout en donnant accès aux régimes de champs fortement couplés.

Dans ce travail l'inflaton est couplé à la matière via un couplage trilineaire dans l'esprit de la référence [42]. La matière sera prise uniquement scalaire ce qui ne peut se raccorder à notre connaissance sur la composition de l'Univers, essentiellement fermionique. Ce modèle n'a pas pour ambition de décrire notre Univers mais juste de comprendre quel est le rôle des collisions dans la dynamique de la production de matière.

Dans un premier temps j'établis le modèle permettant de décrire le *reheating* scalaire au *Next-to-Leading Order* d'un développement en $1/N$ de l'action effective *2PI*. Les équations du mouvement auront pour conditions initiales celles typiques d'un Univers en fin d'inflation à savoir le vide de particules. Ces équations seront implémentées numériquement dans le but d'obtenir une solution numérique. Nous verrons quelle implémentation est la plus judicieuse pour nos propos et présenterons des résultats numériques uniquement pour l'ordre dominant du développement en $1/N$, le suivant n'étant pas encore fonctionnel du point de vue numérique. Les résultats concernant cet ordre font partie des perspectives envisageables à la suite de mes travaux.

1.1 Modèle $O(N)$ avec interaction trilineaire

Pour décrire la production de particules, nous couplons l'inflaton à N autres champs de matière, de type scalaire, χ_a ($a = 1 \dots N$).

Il est plus efficace de choisir comme vertex d'interaction entre l'inflaton et la matière un vertex trilineaire [42]. En effet, un vertex quartique ne permet la production de particules que lorsque la masse effective des particules, habillée des oscillations de l'inflaton, s'annule alors qu'un vertex trilineaire produit des particules pendant toute la durée d'oscillation où leur masse effective au carré est négative. Ainsi en quelques oscillations, on s'attend à ce que le nombre de particules explose.

De cette analyse préalable, on choisira un modèle type $\mathcal{O}(N)$ trilineaire pour la description du reheating scalaire. Le modèle $\mathcal{O}(N)$ est caractérisé par un champ longitudinal à valeur moyenne dans le vide non nulle et $N - 1$ champs transverses. Ici on s'inspire de ce modèle pour créer un modèle où le champ longitudinal constitue l'inflaton et ses fluctuations alors que les champs transverses sont représentés par les N champs χ_a . Cette séparation s'explique pour attribuer des masses différentes aux deux types de champs. Le premier, l'inflaton, est habituellement largement plus massif que la matière [21] qui, *in fine* sera prise à masse nulle dans les simulations numériques.

L'inflaton est également couplé à lui même par un couplage quartique. Cette interaction est là pour des raisons de stabilité du potentiel. En effet le couplage trilineaire, contenant un nombre impair d'inflaton, apporte une instabilité dans le potentiel. Ainsi, pour des grandes valeurs du champ, le potentiel reste borné inférieurement. J'ajoute un couplage quartique à la matière pour étudier l'influence des collisions type "matière-matière" sur la dynamique du système. L'action classique de ce modèle s'écrit donc

$$\mathcal{S}[\hat{\phi}, \chi_a] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \hat{\phi} \partial^\mu \hat{\phi} + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi_a \partial^\mu \chi_a - \frac{M^2}{2} \hat{\phi}^2 - \frac{m^2}{2} \chi_a \chi_a - \frac{\mu}{4!} \hat{\phi}^4 - \frac{\lambda}{4!N} (\chi_a \chi_a)^2 - \frac{g}{2\sqrt{N}} \hat{\phi} \chi_a \chi_a \right]. \quad (1.1)$$

Contrairement à la matière, l'inflaton est représenté avec une valeur moyenne dans le vide non nulle.

$$\hat{\phi}(x^0, \vec{x}) = \phi(x^0) + \varphi(x^0, \vec{x}) \text{ avec } \langle \hat{\phi}(x^0, \vec{x}) \rangle = \phi(x^0) \quad (1.2)$$

tandis que

$$\langle \chi_a(x^0, \vec{x}) \rangle = 0. \quad (1.3)$$

Sous cette nouvelle paramétrisation, l'action se réécrit

$$\mathcal{S}[\phi, \varphi, \chi_a] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi_a \partial^\mu \chi_a - \frac{M^2}{2} \phi^2 - \frac{\mu}{4!} \phi^4 + \right. \\ \left. - \frac{M^2(\phi)}{2} \varphi^2 - \frac{\mu}{6} \phi \varphi^3 - \frac{\mu}{4!} \varphi^4 - \frac{m^2(\phi)}{2} \chi_a \chi_a + \frac{\lambda}{4!N} (\chi_a \chi_a)^2 - \frac{g}{2\sqrt{N}} \varphi \chi_a \chi_a \right] \quad (1.4)$$

où

$$M^2(\phi) = M^2 + \frac{\mu}{2} \phi^2 \quad (1.5)$$

et

$$m^2(\phi) = m^2 + \frac{g}{\sqrt{N}} \phi. \quad (1.6)$$

On note que les terme linéaires en champs sont supprimés pour conserver la symétrie \mathcal{Z}^2 de l'action classique. On déduit de cette action, l'expression des propagateurs (classiques) associés aux fluctuations de l'inflaton et à celles de la matière

$$iG_{\text{cl}}^{-1}(x, y) = \frac{\delta^2 \mathcal{S}}{\delta \varphi(x) \delta \varphi(y)} \Big|_{\varphi=0} = - [\Box_x + M^2(\phi)] \delta(x - y) \quad (1.7)$$

et

$$iD_{\text{cl},ab}^{-1}(x,y) = \left. \frac{\delta^2 \mathcal{S}}{\delta \chi_b(x) \delta \chi_a(y)} \right|_{\chi=0} = - [\square_x + m^2(\phi)] \delta_{ab} \delta(x-y). \quad (1.8)$$

La présence d'un terme linéaire en champs dans l'expression de la masse du propagateur $D_{\text{cl},ab}$ vient du type de vertex considéré pour modéliser l'interaction inflaton-matière. Dans la théorie libre, ϕ oscille périodiquement autour de zéro avec une fréquence M . La masse effective de la matière devient négative ce qui est responsable de l'efficacité de la production de matière pour des modes tels que

$$k \leq |m^2(\phi)|. \quad (1.9)$$

La production de fluctuations de l'inflaton se fait à travers le terme quadratique en champs dans l'expression du propagateur G_{cl} . Celui-ci ne peut jamais devenir négatif mais peut devenir suffisamment petit tel que l'équation du mouvement soit productive pour une certaine bande de résonance.

De cette action, on déduit également la fonctionnelle génératrice $\mathcal{W}[J, R]$ des fonctions de Green connexes, définie par [59]

$$e^{i\mathcal{W}[J,R]} = \int \mathcal{D}\varphi \exp i \left\{ \mathcal{S}[\varphi] + \int d^4x [J_a(x) \varphi_a(x)] + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y [R_{ab}(x,y) \varphi_a(x) \varphi_b(y)] \right\} \quad (1.10)$$

pour un champ générique $\varphi_a(x)$ ¹. En prenant une double transformée de Legendre (l'une par rapport à la source linéaire, l'autre par rapport à la source bilinéaire), on obtient l'action effective $2PI$ dont il est question à la section suivante. Pour calculer l'action effective nPI il faut n transformées de Legendre d'une fonctionnelle génératrice avec des sources n -linéaires.

Dans notre cas il faudrait tout d'abord considérer les champs (et leur sources associées) ϕ_a à valeur moyenne dans le vide non nulle, dériver les équations puis mettre à zéro cette valeur moyenne. Ceci donnerait une condition de stationnarité pour les champs macroscopique relatif à ces champs. Ceci est équivalent à considérer dès le départ qu'ils ont une valeur moyenne dans le vide nulle et donc ne pas leur associer de source [59].

L'action effective qui en découle, $\Gamma[\phi_a, G_{ab}]$ est paramétrisée non plus par les champs-quantique mais par le champ macroscopique $\phi_a(x)$ et les fonctions à deux points connexes $G_{ab}(x,y)$ définies par [59]

$$\frac{\delta \mathcal{W}}{\delta J_a(x)} = \phi_a(x) \quad (1.11)$$

$$\frac{\delta \mathcal{W}}{\delta R_{ab}(x,y)} = \frac{\phi_a(x) \phi_b(y) + G_{ab}(x,y)}{2}. \quad (1.12)$$

Par cette paramétrisation, on n'impose pas au système la trajectoire à suivre (dans l'espace des solutions) mais on lui laisse la liberté de choisir celle qui extrémise l'action effective et qui donne la solution physique au problème. Ceci est donc atteint quand

$$\begin{cases} \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_a(x)} &= -J_a(x) - \int d^4y R_{ab}(x,y) \phi_b(y) \\ \frac{\delta \Gamma}{\delta G_{ab}(x,y)} &= -\frac{1}{2} R_{ab}(x,y) \end{cases}. \quad (1.13)$$

¹Le contenu en champs est simplifié pour la clarté de la démonstration.

Si on prend désormais le système physique (à sources nulles) alors la solution extrémisant l'action effective est obtenue pour $\phi_a = \bar{\phi}_a$ et $G_{ab} = \bar{G}_{ab}$.

$$\begin{cases} \left. \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_a(x)} \right|_{\phi_a = \bar{\phi}_a} = 0 \\ \left. \frac{\delta \Gamma}{\delta G_{ab}(x,y)} \right|_{G_{ab} = \bar{G}_{ab}} = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

connues sous le nom de conditions de stationarité.

Dans la suite du texte, nous omettrons la barre sur les variables physiques par commodité d'écriture. Nous parlerons de propagateurs complets (par opposition à propagateur classique) car ils ont la particularité de contenir toutes les corrections quantiques à un ordre donné du développement en boucle de l'action effective.

1.2 Action effective et équations du mouvement

Les méthodes habituelles de théorie des champs échouent quand elles sont appliquées aux systèmes hors-équilibre [47]. En effet si on applique la théorie des perturbations dans les systèmes hors-équilibre, on se rend compte que les quantités pertinentes sont, après développement perturbatif, séculières. Elles croissent (au moins) linéairement avec le temps ce qui rend le développement valide pour des temps suffisamment courts tels que $\epsilon t \ll 1$ et non pas pour des valeurs de $\epsilon \ll 1$ comme on s'y attend (pour un développement en ϵ). Cette sécularité n'est pas un phénomène dû au couplage. Même pour des méthodes non-perturbatives comme $1/N$ elle peut avoir lieu.

Même si la sécularité peut être contournée par une méthode ou une autre, il reste la question de l'universalité ou l'insensibilité de la réponse à temps longs aux changements de conditions initiales. Ceci est le propre de la thermalisation du système qui n'est caractérisée que par la quantité d'énergie initiale du système. En effet, au delà des approximations type *large-N*, champs-moyen ou encore *Leading Order* qui possèdent une infinité de quantités conservées, les approximations incluant les non-localités et plus particulièrement les collisions (*Next-to-Leading Order*), n'ont que quelques quantités conservées, dont l'énergie totale comme d'habitude, qui détermine la température du système à l'équilibre. Ce qui échoue dans les approximations locales c'est leur caractère à conserver spurieusement une infinité d'informations ne pouvant donc pas "oublier" les conditions initiales et thermaliser.

Les méthodes fonctionnelles du calcul de l'action effective $2PI$ (ou plus généralement nPI) n'échouent pas à la description de la théorie des champs hors équilibre dans le sens où elles respectent la non-sécularité et l'universalité de ces systèmes. De plus il existe des méthodes non-perturbatives comme le développement en $1/N$ qui les rendent appropriées à l'étude du reheating que nous regardons [49, 52].

L'action effective $2PI$ s'écrit [44],

$$\Gamma[\phi, G, D] = \mathcal{S}[\phi, 0, 0] + \frac{i}{2} \text{Tr} \text{Ln} G^{-1} + \frac{i}{2} \text{Tr} \text{Ln} D^{-1} + \frac{i}{2} \text{Tr} G_{\text{cl}}^{-1} G + \frac{i}{2} \text{Tr} D_{\text{cl}}^{-1} D + \Gamma_2[\phi, G, D] \quad (1.15)$$

où G et D_{ab} sont respectivement les propagateurs complets des fluctuations φ et χ_a qui peuvent être redéfinis de la façon suivante

$$G(x, y) = \langle \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \varphi(x) \varphi(y) \rangle \quad (1.16)$$

$$D_{ab}(x, y) = \langle \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \chi_a(x) \chi_b(y) \rangle \quad (1.17)$$

où le symbole $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ représente le produit ordonné en temps sur un contour \mathcal{C} (précisé ultérieurement) et où la matrice D_{ab} peut s'écrire $D_{ab}(x, y) = D(x, y) \delta_{ab}$ par symétrie du groupe

$O(N)$.

Le premier terme de cette action est simplement l'action classique prise à la valeur moyenne des champs ce qui correspond à l'approximation en arbre d'un développement en boucle de l'action (1.1). Les termes de trace (à prendre au sens de la trace d'une fonctionnelle) sont les termes à une boucle dans ce même développement. Le dernier terme, Γ_2 , est le terme de reste qui contient toute l'approximation de la théorie. C'est via ce terme de reste que seront exprimées, dans notre cas, les collisions entre particules, les effets de mémoire et les effets hors couche de masse. Usuellement, on inclut dans ce terme les contre-termes de renormalisation. Ici le seul contre-terme de renormalisation est celui qui renormalise la masse (divergence quadratique). On peut le voir comme une simple redéfinition de la masse nue M .

En dérivant l'action effective par rapport à $\phi(x)$, $G(x, y)$ et $D(x, y)$ on obtient les équations du mouvement à partir des conditions de stationnarité définies en (1.13).

$$(1.14) \Leftrightarrow \begin{cases} [\partial_{x^0}^2 + M^2 + \frac{\mu}{6}\phi^2(x^0) + \frac{\mu}{2}G(x, x)] \phi(x^0) & = J(G, D) \\ [\square_x + M^2(\phi)] G(x, y) + i \int_z \Sigma_G(x, z) G(z, y) & = -i\delta^{(4)}(x - y) \\ [\square_x + m^2(\phi)] D_{ab}(x, y) + i \int_z \Sigma_{D,ac}(x, z) D_{cb}(z, y) & = -i\delta^{(4)}(x - y) \end{cases} \quad (1.18)$$

où on a défini les *self-energies* par

$$\Sigma_G(x, y) = 2i \frac{\delta \Gamma_2[\phi, G, D]}{\delta G(x, y)} \quad (1.19)$$

$$\Sigma_{D,ab}(x, y) = 2i \frac{\delta \Gamma_2[\phi, G, D]}{\delta D_{ba}(x, y)} \quad (1.20)$$

et le terme de source² par

$$J(G, D) = \frac{i}{2} \frac{\delta \text{Tr} D_{\text{cl}}^{-1} D}{\delta \phi(x)} \quad (1.21)$$

qui peuvent être interprétées diagramatiquement par l'ouverture d'une ligne de propagateur (ou champ) dans les graphes de Γ_2 .

Par la même symétrie de $O(N)$, la *self-energy* $\Sigma_{D,ab}$ peut s'écrire sous la forme $\Sigma_{D,ab} = \delta_{ab} \Sigma_D$ ainsi

$$\delta_{ab} \Sigma_D(x, y) = 2i \frac{\delta \Gamma_2[\phi, G, D]}{\delta_{ba} \delta D(x, y)} \quad (1.22)$$

$$\Sigma_D(x, y) = \frac{2i}{N} \frac{\delta \Gamma_2[\phi, G, D]}{\delta D(x, y)}. \quad (1.23)$$

$$(1.24)$$

Ces équations du mouvement sont en fait les équations de Schwinger-Dyson

$$G^{-1}(x, y) = G_{\text{cl}}^{-1}(x, y) - \Sigma(x, y) \quad (1.25)$$

qui contiennent formellement une resommation infinie du propagateur complet

$$\begin{aligned} G(x, y) &= G_{\text{cl}}(x, y) + \int_{zu} G_{\text{cl}}(x, z) \Sigma(z, u) G_{\text{cl}}(u, y) \\ &\quad + \int_{zuvw} G_{\text{cl}}(x, z) \Sigma(z, u) G_{\text{cl}}(u, v) \Sigma(v, w) G_{\text{cl}}(w, y) + \dots \end{aligned} \quad (1.26)$$

²Ici $J(G, D)$ n'est pas la source linéaire $J(x)$ introduite dans la réaction (1.10)

Nous avons pris comme raccourci de notation

$$\int_x \equiv \int_{\mathcal{C}} dx^0 \int d^3\vec{x}$$

où l'intégrale en temps s'effectue sur le contour fermé \mathcal{C} dit contour de Schwinger ayant l'allure de la figure (1.1).

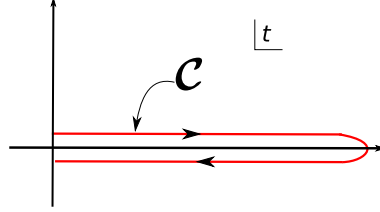


FIG. 1.1 – Contour de Schwinger noté \mathcal{C} dans tout le document.

Evaluer l'action effective selon ce contour (et plus généralement sur un contour fermé) permet de traiter la théorie hors-équilibre complète sans aucune autre approximation. La seule contrainte est de garder une matrice densité initiale gaussienne sous peine de rajouter des sources initiales ou de traiter la théorie par nPI avec $n > 2$ [68]. Avec $2PI$ les fonctions de corrélations à plus de points que celles à deux points sont générées automatiquement au cours du temps tenant en compte les non-gaussianités de la matrice densité au temps $t \neq 0$.

Les équations du mouvement sont exactes et ne nécessitent aucune autre approximation. La seule approximation de la théorie se situe dans l'expression de Γ_2 dans l'action effective. Nous avons donc une théorie dont toute l'approximation se situe dans l'action et qui possède alors toutes les propriétés intéressantes des théories dérivées du premier principe, comme par exemple la conservation de l'énergie.

1.3 Développement en $1/N$ et approximation *Next-to-Leading Order*

Comme il a été spécifié dans la section précédente, l'action effective pour l'heure est exacte. Toute l'approximation de la théorie s'exprime dans le terme de reste Γ_2 . Ce terme ne contient que des contributions dites *two-particle irreducible* ($2PI$) *i.e.* les graphes qui ne déconnectent pas en ouvrant deux lignes internes de propagateur.

L'inflaton contenant beaucoup d'énergie susceptible de se transférer aux fluctuations, on s'attend à ce que le nombre de particules devienne grand et par conséquent que la théorie devienne non-perturbative. En effet le phénomène tachyonique, ayant lieu aux temps courts produit des particules jusqu'à un nombre d'ordre $\mathcal{O}[\inf(\frac{M^2}{g\phi}, \frac{1}{\lambda})]$ ce qui annihile l'effet ordonnateur d'un petit couplage. Cependant nous utiliserons un développement perturbatif pour l'auto-interaction des fluctuations de l'inflaton considérant que le couplage μ , intervenant dans le vertex $\mu\phi^4$, tel que $\mu \ll \lambda$.

Si on se limite à l'ordre dominant de ce développement en $1/N$, alors nous ne capturons que les effets locaux corrigeant la masse mais ne donnant pas à la théorie la possibilité de thermaliser comme il a été expliqué dans le paragraphe précédent. De plus ces approximations (*LO*, *Hartree*, *Large-N*, champs-moyen...) ont été amplement étudiés dans le passé³ où

³pour une liste des références voir l'introduction de la première partie

l'efficacité particulière des modèles tachyoniques dans la production massive de particules a été montrée [48, 42, 43, 34]. C'est pour cela qu'ici nous reprendront l'idée de l'instabilité tachyonique mais dans le cadre d'une théorie quantique et avec un développement en $1/N$ à l'ordre sous-dominant $\mathcal{O}(1)$ (*Next-to-Leading Order*). Nous voulons par ce biais, d'une part chercher la thermalisation⁴, et d'autre part étudier l'influence des collisions pendant la phase de production de particules.

Ces collisions, ainsi que les effets de mémoire et les effets hors couche de masse, sont le résultat des contributions non-locales aux *self-energies* dans les équations du mouvement. L'échange d'impulsion entre les différents degrés de liberté est la source même de la perte de mémoire du système sur les conditions initiales, donc de l'universalité de la théorie conduisant à la thermalisation.

Les conditions de travail de la cosmologie (plus particulièrement le problème du reheating) ne nous permettront pas d'atteindre numériquement cette thermalisation du système. Une étude à part, dans un tout autre contexte où le champs possède une valeur moyenne dans le vide nulle, montrera comment un système loin de l'équilibre, thermalise avec cette technique.

1.3.1 Expression de Γ_2

Dans notre modèle, les termes au delà de l'approximation à une boucle de l'action effective peuvent être séparés en deux catégories ; les termes locaux et les non-locaux. Les premiers viendront habiller la masse ne donnant pas lieu aux collisions que nous cherchons. Ils participent à l'ordre $\mathcal{O}(N)$ (*Leading Order*). A l'ordre suivant $\mathcal{O}(1)$ (*Next-to-Leading Order*), On retrouve des termes non locaux faisant intervenir une série infinie de diagrammes en "bulles".

Sur la figure (1.2) nous avons représenté les graphes $2PI$ constructibles avec les vertex de la théorie (1.4) d'ordre le plus bas $\mathcal{O}(1)$ dans le développement en $1/N$. Chaque ligne représente un propagateur complet (D pour les lignes pleines et G pour les lignes tiretées). Comme on le remarque sur la figure (1.2), d'un terme à l'autre de la série, on rajoute un vertex qui abaisse l'ordre du développement tandis que la bulle (où courent N champs) augmente cet ordre. Le produit des deux s'annihile ce qui rend tous les graphes de ce type du même ordre.

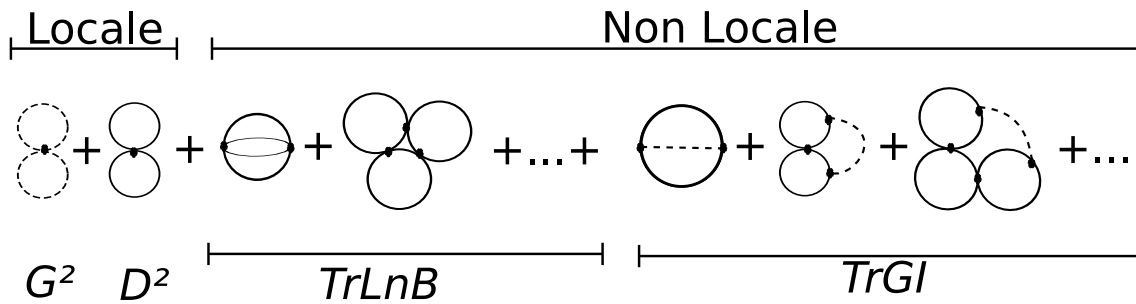


FIG. 1.2 – Expression diagrammatique de Γ_2 dans le cadre de notre développement. La ligne pleine correspond au propagateur des champs de matière D et la ligne tiretée correspond au propagateur des fluctuations de l'inflaton G .

⁴la difficulté à obtenir une description cohérente depuis la phase de production jusqu'à la thermalisation est essentiellement due à la présence de deux échelles de temps : l'une très courte (production) et l'autre très longue (thermalisation). Numériquement ceci est difficile à gérer.

De plus, dans le cas d'une interaction type $\lambda\varphi^4$, le propagateur D croît exponentiellement vite pendant tout le régime linéaire des e.o.m. jusqu'à atteindre une valeur inversement proportionnelle au couplage qui le caractérise [23]. Ceci contribue à détruire l'effet ordonnateur d'un développement en couplage. Les mécanismes tachyoniques de production de particules, comme dans notre cas à travers un vertex trilinéaire, ont pour réputation d'être plus efficaces que celles employant une résonance paramétrique, ce qui détruit plus vite encore la hiérarchisation en couplage.

La représentation diagrammatique de la figure (1.2) prend pour expression⁵

$$\Gamma_2[\phi, G, D] = -\frac{\lambda N}{4!} \int_x D^2(x, x) - \frac{\mu}{4!} \int_x G^2(x, x) + \frac{i}{2} \text{Tr}_C \text{Ln} B + i \frac{g^2}{4} \text{Tr}_C G I \quad (1.27)$$

où

$$B(x, y) = \delta(x - y) + \frac{i\lambda}{6} \Pi(x, y) \quad (1.28)$$

et où

$$\Pi(x, y) = D(x, y)D(y, x) \quad (1.29)$$

représente la fonction "bulle".

Les facteurs N ont été combinés à ceux des vertex pour laisser transparaître l'ordre du développement. On voit ainsi qu'au *Leading Order* il n'y a qu'un seul terme, proportionnel à D^2 (diagrammes en "8"), à deux boucles qui se trouve être une correction à la masse (terme local). A cet ordre, les fluctuations de l'inflaton n'interviennent plus dans le terme Γ_2 . Un autre diagramme en "8" d'ordre $\mathcal{O}(1)$ (*Next-to-Leading Order*), premier terme de la somme $\text{Tr}_C \text{Ln} B$, contribue également comme une correction de masse. Les autres diagrammes de la série de "bulles" contribueront à des termes non-locaux dans les équations du mouvement.

On peut exprimer simplement l'inverse de $B(x, y)$ comme étant

$$B^{-1}(x, y) = \delta(x - y) - i \frac{\lambda}{6} I(x, y). \quad (1.30)$$

Nous avons introduit une fonction $I(x, y)$ qui représente la série de "bulles" du type (1.29). Cette fonction effectue automatiquement la resommation infinie des diagrammes d'ordre $\mathcal{O}(1)$. Cette fonction s'exprime par

$$I(x, y) = \Pi(x, y) - \frac{i\lambda}{6} \int_z I(x, z) \Pi(z, y) \quad (1.31)$$

et intervient dans (1.124) sous la forme de traces fonctionnelles

$$\text{Tr}_C \text{Ln} B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{i\lambda}{6} \right)^n \int_{x_1, \dots, x_n} \Pi(x_1, x_2) \cdots \Pi(x_n, x_1) \quad (1.32)$$

pour la série de "bulles" uniquement composée de propagateurs D , et

$$\text{Tr}_C G I = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{i\lambda}{6} \right)^n \int_{x', y', x_1, \dots, x_n} G(x', y') \Pi(x', x_1) \cdots \Pi(x_n, y'). \quad (1.33)$$

⁵La trace fonctionnelle est à prendre sur le contour en temps.

pour la série de "bulles" faisant intervenir le propagateur G entre les "bulles".

Cette série infinie de diagrammes prend une expression finie qui peut être implémentée numériquement sans approximation supplémentaire à part celles inhérentes à la discrétisation spatio-temporelle du système.

Nous pouvons remarquer également que, dans cette approximation, le champ macroscopique ϕ n'intervient pas dans l'expression de Γ_2 . Sa seule intervention est dans la dépendance temporelle des masses comme nous le voyons déjà sur l'action (1.4).

1.3.2 Calcul des *self-energies*

Pour intégrer les effets désirés à notre théorie nous avons vu qu'il fallait ajouter des termes non locaux dans l'action effective ce qui mène à des équations du mouvement intégral-différentielles à travers la présence des *self-energies*. Ces équations (dans le cadre de notre approximation) sont hautement non triviales à calculer et ne peuvent être résolues analytiquement sans autre approximation.

Pour calculer les *self-energies* il suffit de dériver le terme Γ_2 de l'action effective par rapport au propagateur complet. On obtient donc

$$\Sigma_G(x, y) = -i\frac{\mu}{2}G(x, x)\delta(x - y) - \frac{g^2}{2}I(x, y) \quad (1.34)$$

$$\Sigma_D(x, y) = -i\frac{\lambda}{6}\frac{N+2}{N}D(x, x)\delta(x - y) + \mathbb{P}(x, y)D(x, y) \quad (1.35)$$

Où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x, y) = & -\frac{\lambda^2}{18N}I(x, y) - \frac{g^2}{N} \left\{ G(x, y) - i \int_z [I(x, z)G(z, y) + G(x, z)I(z, y)] + \right. \\ & \left. (-i)^2 \int_z \int_{z'} I(x, z)G(z, z')I(z', y) \right\}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Chacune d'entre elles peut être décomposée en une partie *locale* et une partie *non-locale* de la façon suivante

$$\Sigma(x, y) = i\Sigma^{(0)}(x)\delta(x - y) + \bar{\Sigma}(x, y) \quad (1.37)$$

avec

$$\Sigma_D^{(0)}(x, x) = \frac{\lambda}{6}\frac{N+2}{N}D(x, x) \quad (1.38)$$

$$\Sigma_G^{(0)}(x, x) = \frac{\mu}{2}G(x, x) \quad (1.39)$$

et

$$\bar{\Sigma}_D(x, y) = \mathbb{P}(x, y)D(x, y) \quad (1.40)$$

$$\bar{\Sigma}_G(x, y) = -\frac{g^2}{2}I(x, y). \quad (1.41)$$

Le terme local de la *self-energy* de la matière révèle sa partie *Leading Order* et sa partie *Next-to-Leading Order* à travers le facteur $\frac{N+2}{N}$ traduisant les deux diagrammes en "8" tandis que celle des fluctuations de l'inflaton est uniquement *Next-to-Leading Order*.

Les termes non locaux ne font intervenir que la resommation de la série de "bulles", la fonction I . On peut voir en combinant les équations (1.18), (1.40), (1.41) et la définition (1.31), que les resommations infinies sont exprimées par des quantités finies implémentables numériquement sans troncation.

Ces termes non locaux mélangent les contributions des différents propagateurs. La *self-energy* des fluctuations de l'inflaton est directement proportionnelle à la fonction de resommation infinie des "bulles" constituées de propagateurs de matière. L'évolution de l'inflaton dépend de celle de la matière à travers ce terme et inversement, l'évolution du propagateur de la matière est fortement liée à celui de l'inflaton via la fonction \mathbb{P} qui est une combinaison de convolutions entre G et la série de "bulles" I .

C'est à travers ces termes que le système peut thermaliser (même en absence de champ). Sans eux, chacun de ces propagateurs ne sont reliés que par la présence du champ dans leur masse, et ce dernier est relié à ces propagateurs via un terme de rétro-action.

On peut dès à présent calculer le terme de source $J(G, D)$ présent dans l'équation du mouvement pour le champ macroscopique ϕ en dérivant le terme à une boucle, proportionnel à $\text{Tr} D_{\text{cl}}^{-1} D$, de l'action effective par rapport à ϕ

$$J(G, D) = -\frac{g\sqrt{N}}{2} D(x, x). \quad (1.42)$$

Ce terme là est local et intervient comme une rétro-action de la matière sur l'évolution de l'inflaton tout comme le terme proportionnel à G dans l'équation pour le champ, du système (1.18). Ce type de source, sans dépendance explicite en champ, est caractéristique des couplages trilineaires comme nous le reverrons dans le chapitre sur le *reheating* fermionique ayant un couplage de Yukawa.

La production de matière (et la production de fluctuations de l'inflaton) modifie l'évolution de l'équation du mouvement de telle sorte que l'énergie totale soit conservée. Ces termes de rétro-action sont responsables de la désintégration (partielle ou totale) de l'inflaton.

1.4 Décomposition spectrale et équations du mouvement

Une façon commode de résoudre les équations du mouvement est de séparer les propagateurs (et toutes les quantités qui en découlent) en deux fonctions : l'une donnant le spectre accessible et l'autre donnant l'information sur la population statistique de l'état accessible. La première contient toute l'information sur la quantification de la théorie alors que la deuxième est plus statistique. Même si on parlera plus souvent de la fonction statistique car elle mesure l'importance des fluctuations et par conséquent le nombre de particules, il faut se souvenir que la fonction spectrale est la trace quantique de la théorie dans les équations du mouvement.

Les quantités G, D, I, \mathbb{P} et $\bar{\Sigma}$ sont donc soumises à cette décomposition⁶

$$X(x, y) = X_F(x, y) - \frac{i}{2} \text{sign}_C(x^0 - y^0) X_\rho(x, y) \quad (1.43)$$

où X_F dénote la fonction statistique et X_ρ la fonction spectrale. On peut également définir ces fonctions pour le propagateurs de la façon suivante

⁶Par la suite nous noterons volontairement $\Sigma_{F,\rho}$ pour $\bar{\Sigma}_{F,\rho}$

$$G_F(x, y) = \frac{1}{2} \langle [\varphi(x), \varphi(y)] \rangle \quad (1.44)$$

$$G_\rho(x, y) = i \langle \{\varphi(x), \varphi(y)\} \rangle \quad (1.45)$$

et de même pour D .

Les propriétés de symétrie par permutation des variables sont les suivantes

$$\begin{aligned} X_F(x, y) &= X_F(y, x) \\ X_\rho(x, y) &= -X_\rho(y, x) \Rightarrow X_\rho(x, x) = 0 \end{aligned} \quad (1.46)$$

afin de respecter la symétrie globale d'un propagateur de champ scalaire dans cette même transformation.

En appliquant cette décomposition à toutes nos quantités et en notant que

$$\begin{aligned} \int_C dz^0 \text{sign}_C(z^0 - y^0) &= -2 \int_0^{y^0} dz^0 \\ \int_C dz^0 \text{sign}_C(x^0 - z^0) \text{sign}_C(z^0 - y^0) &= \int_0^{y^0} dz^0 (-1) + \int_{y^0}^{x^0} dz^0 + \int_{x^0}^0 dz^0 (-1) \text{ si } x^0 > y^0 \\ \int_C dz^0 \text{sign}_C(x^0 - z^0) \text{sign}_C(z^0 - y^0) &= \int_0^{x^0} dz^0 (-1) + \int_{x^0}^{y^0} dz^0 + \int_{y^0}^0 dz^0 (-1) \text{ si } y^0 > x^0 \end{aligned} \quad (1.47)$$

on trouve facilement les equations du mouvement pour chacune des fonctions de la décomposition spectrale

$$\left[\partial_{x^0}^2 + M^2 + \frac{\mu}{6} \phi^2(x^0) + \frac{\mu}{2} G_F(x, x) \right] \phi(t) = -\frac{g\sqrt{N}}{2} D_F(x, x) \quad (1.48)$$

$$[\square_x + M_{MF}^2(x)] G_F(x, y) = \int_0^{y^0} dz \Sigma_F^G(x, z) G_\rho(z, y) - \int_0^{x^0} dz \Sigma_\rho^G(x, z) G_F(z, y) \quad (1.49)$$

$$[\square_x + M_{MF}^2(x)] G_\rho(x, y) = - \int_{y^0}^{x^0} dz \Sigma_\rho^G(x, z) G_\rho(z, y) \quad (1.50)$$

et similairement pour le propagateur de matière en substituant $G_{F,\rho}$ par $D_{F,\rho}$, M_{MF}^2 par m_{MF}^2 et $\Sigma_{F,\rho}^G$ par $\Sigma_{F,\rho}^D$. Les expressions des masses carrés de champs-moyen prennent les expressions suivantes

$$M_{MF}^2(x) = M^2 + \frac{\mu}{2} \phi^2(x^0) + \frac{\mu}{2} G_F(x, x) \quad (1.51)$$

et

$$m_{MF}^2(x) = m^2 + \frac{g}{\sqrt{N}} \phi(x^0) + \frac{\lambda}{6} \frac{N+2}{N} D_F(x, x). \quad (1.52)$$

Dans l'équation du champ (1.48) on remarque trois contributions non-linéaires. La première est la rétro-action du champ sur lui-même, issue du vertex ϕ^4 de l'action (1.4) qui, en l'absence des deux autres, donnerait à cette équation la forme d'une équation de Jacobi où la solution serait une fonction du type sinus ou cosinus de Jacobi. Les deux autres contributions, l'une proportionnelle à $G\phi$ et l'autre venant de la source $J(G, D)$, prennent place plus tardivement dans l'évolution du champ, sous forme de rétro-action limitant le

transfert d'énergie du champ vers les fluctuations en brisant la périodicité de l'oscillation du champ et ce en annihilant le phénomène de résonance paramétrique.

Initialement, ces dernières sont petites. Ce régime correspond à l'approximation classique où les fluctuations sont négligeables devant le champ macroscopique. Pendant cette phase, les fluctuations croissent exponentiellement vite avec le temps de telle sorte qu'elles deviennent du même ordre que le champ. A ce moment, on quitte le régime classique et la croissance exponentielle des fluctuations cesse. L'évolution du champ de celui-ci est alors fortement intriquée à celle des fluctuations.

Aux temps courts, l'équation (1.49) se résume essentiellement à son membre de gauche, les intégrales de mémoire étant d'autant plus petites qu'elles intègrent des produits de propagateurs (eux aussi petit à temps courts). L'équation résultante est alors une équation différentielle avec masse dépendante périodiquement du temps.

Dans l'expression de M_{MF}^2 , la dépendance en champ est quadratique. L'équation du mouvement associée ressemble à celle d'un pendule couplé à une source périodique est menant le système à la résonance paramétrique. Cette résonance se manifeste par l'accroissement exponentiel de la fonction statistique (des fluctuations de l'inflaton) pouvant être interprétée par une production massive de particules.

Dans le cas de la matière, le mécanisme de production de particules est différent. L'expression de la masse carrée m_{MF}^2 devient négative sur tout un intervalle de temps. A ces moments, la solution à l'équation du mouvement est une fonction périodique à fréquence imaginaire, soit une exponentielle croissante. Pendant toute cette durée la production de particules est massive.

La deuxième contribution est la rétro-action des fluctuations sur leur propre évolution. Ce type de contribution n'apparaît que dans les termes à deux boucles dans l'action effective. Dans ce modèle on remarque que l'influence de l'évolution de G n'intervient dans celle de D qu'indirectement via le champ (si on se restreint au champ moyen, r.h.s. nuls) et inversement.

1.5 Espace de Fourier

La théorie de l'inflation a été introduite dans les années 80 principalement par A. Guth, A. Linde, S. Mukhanov pour palier à une incompréhension observationnelle sur les données du fond diffus cosmologique. Sur ce dernier on relève une étonnante homogénéité et isotropie de l'Univers à grande échelle. La surprenante concordance entre théorie et expérience ainsi que les prédictions de cette théorie, vérifiées la première fois par le satellite COBE, ont fait son succès. Cette homogénéité et isotropie étaient initialement juste une hypothèse simplificatrice pour résoudre les équations d'Einstein et s'avèrent plus tard être une donnée fondamentale de la caractéristique de l'Univers à cette échelle.

Dans notre cas, cette propriété de symétrie, se manifeste dans les quantités calculées par une dépendance uniquement en $(x^0, y^0; \vec{x} - \vec{y})$ au lieu de $(x^0, y^0; \vec{x}, \vec{y})$. Cette homogénéité spatiale nous permet de résoudre la partie spatiale de nos e.o.m. algébriquement en prenant leur transformée de Fourier qui nous permet d'obtenir des quantités qui ne dépendent plus que de $(x^0, y^0; \vec{k})$. Cependant, le système n'étant pas invariant par translation dans le temps, cette transformation de Fourier ne peut s'appliquer à la composante temporelle ce qui nous oblige à conserver des équations différentielles dans cette variable.

Nous définissons la transformé de Fourier spatiale $f(\vec{k})$ de la fonction $f(\vec{x} - \vec{y})$ par

$$f(\vec{x} - \vec{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} f(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}. \quad (1.53)$$

L'isotropie de l'Univers nous permet en plus d'exprimer nos quantités non pas en fonction du vecteur \vec{k} mais uniquement de son module (que nous noterons $k = \|\vec{k}\|$)

Nous utiliserons la convention suivante $x = (t, \vec{x}), y = (t', \vec{y})$ et $z = (t'', \vec{z})$.

Les équations du mouvement dans l'espace de Fourier s'écrivent⁷ :

$$\left[\partial_t^2 + M^2 + \frac{\mu}{6} \phi^2(t) + \frac{\mu}{2} \int_k G_F(t, t; k) \right] \phi(t) = -\frac{g\sqrt{N}}{2} \int_k D_F(t, t; k) \quad (1.54)$$

$$[\partial_t^2 + k^2 + M_{MF}^2(t)] G_\rho(t, t'; k) = - \int_{t'}^t dt'' \Sigma_\rho^G(t, t''; k) G_\rho(t'', t'; k) \quad (1.55)$$

$$\begin{aligned} [\partial_t^2 + k^2 + M_{MF}^2(t)] G_F(t, t'; k) &= \int_0^{t'} dt'' \Sigma_F^G(t, t''; k) G_\rho(t'', t'; k) + \\ &\quad - \int_0^t dt'' \Sigma_\rho^G(t, t''; k) G_F(t'', t'; k) \end{aligned} \quad (1.56)$$

et similairement pour $D_{F,\rho}$ en remplaçant M_{MF}^2 par m_{MF}^2 et $\Sigma_{F,\rho}^G$ $\Sigma_{F,\rho}^D$. L'expression des masses carrés de champs-moyen dans cet espace diffère peu de celles dans l'espace direct, à noter la présence d'une intégrale sur les modes pour les termes locaux, caractéristique d'un graphe type *tadpole*.

$$M_{MF}^2(t) = M^2 + \frac{\mu}{2} \phi^2(t) + \frac{\mu}{2} \int_k G_F(t, t; k) \quad (1.57)$$

et

$$m_{MF}^2(t) = m^2 + \frac{g}{\sqrt{N}} \phi(t) + \frac{\lambda}{6} \frac{N+2}{N} \int_k D_F(t, t; k). \quad (1.58)$$

Ces termes de trace sur les modes sont fondamentalement différents des intégrales de mémoire car eux sont locaux en temps. On note cependant que les produits de convolution de l'espace direct pour les *self-energies* sont devenus des produits directs pour la partie spatiale uniquement laissant la partie temporelle inchangée.

On renormalise sommairement nos équations du mouvement en redéfinissant la masse nue par la masse renormalisée M_0 et m_0 telle que les divergences quadratiques soient soustraites. Pour cela on soustrait à la masse nue la contribution de la rétro-action au temps initial. On a donc

$$\begin{aligned} M_0^2 &= M^2 - \frac{\mu}{2} \int_k G_F(0, 0t; k) \\ m_0^2 &= m^2 - \frac{\lambda}{6} \frac{N+2}{N} \int_k D_F(0, 0t; k) \end{aligned} \quad (1.59)$$

où M_0 sera pris comme échelle d'énergie dans tout le suivi de l'étude.

Lorsque le carré de la fréquence $\omega_k^2 = k^2 + m_{MF}^2(t)$ devient négatif, on se trouve avec un potentiel présentant une instabilité tachyonique. La solution à l'équation du mouvement

⁷où nous avons utilisé la notation $\int_k f(k) \equiv \int_0^\Lambda \frac{k^2 dk}{2\pi^2} f(k)$.

est une exponentielle croissante. Sur l'expression de la masse carrée des champs de matière on voit que ceci a lieu pour les modes tels que $k^2 \leq -m^2 - g\phi(t)$ ce qui est possible lorsque $g\phi(t) \leq -m^2$, si on néglige la rétro-action de la matière sur elle-même (ce qui est possible tant que le système est dans son régime classique). Une fois les fluctuations non négligeables, le système quitte son régime classique et la production de particules cesse.

Dans le cas où le terme $\sigma_0^2 = \frac{\mu}{6}\phi^2(0) \gg M_0^2$, la périodicité du champ produit des bosons dans une bande de résonance délimitée par [23]

$$\frac{3}{2} \leq \frac{k^2}{\sigma_0^2} \leq \sqrt{3} \quad (1.60)$$

et dans le cas où le terme $\sigma_0^2 \ll M_0^2$ la bande de résonance se situe à

$$\frac{k_{res}^2}{3M_0^2} = 1 + \frac{\sigma_0^2}{2} \quad (1.61)$$

et a pour largeur

$$\frac{\Delta k_{res}}{M_0} = \frac{\sqrt{3}\sigma_0^2}{4M_0^2}. \quad (1.62)$$

Jusqu'à présent nous avons discuté des équations du mouvement sans parler des conditions initiales permettant de fixer une solution précise dans l'espace des solutions à ces équation du mouvement.

1.6 Conditions initiales

L'étude du reheating est l'étude du transfert de l'énergie contenue dans le champ responsable de la croissance exponentielle de la taille de l'Univers en matière. On peut voir ça d'une autre façon en considérant que tout ou partie de l'excédent d'énergie motrice à l'expansion accélérée de l'Univers est transformée en fluctuations. Ce point de vue naïf nous est néanmoins bien utile pour illustrer la motivation du choix de nos conditions initiales. Notre modèle se focalise sur la production de ces fluctuations, après la phase d'inflation et en négligeant l'expansion de l'Univers. Il intègre pour ça des processus tels que les collisions de particules permettant également à l'Univers de thermaliser.

Ceci signifie que nous voulons donc partir d'un Univers vide aussi bien de particules de matière que de fluctuations de l'inflaton, et où toute l'énergie disponible se trouve dans l'inflaton. Concrètement nous voulons une grande valeur initiale du champ macroscopique et le vide de particules. Notons également que l'approximation de *slow-roll* demande à ce que l'énergie cinétique du champ soit petite devant son énergie potentielle.

Pour définir nos conditions initiales, nous devons définir le nombre de particules en termes de la fonction statistique.

Définition du nombre de quasi-particules

Pour définir le nombre de quasi-particules dans notre contexte, on peut premièrement considérer la théorie de champ moyen où l'image n'est pas celle de particules de masse M mais plutôt de quasi-particules de masse M_{MF} interagissant peu entre elles. Nous garderons cette image tolérable même dans le régime où les collisions dominent. Cette définition du nombre de quasi-particules n'est pas unique[44, 69, 61].

Premièrement écrivons ce que vaut l'énergie du système dans le cadre d'une image de quasi-particules :

$$\mathcal{E}(t) = \int_k \mathcal{E}_k(t) = \langle \mathcal{H}(t) \rangle = \int_k \langle \hat{\phi}_{-\vec{k}}(t) [\partial_t^2 + k^2 + \mathcal{M}^2(t)] \hat{\phi}_{\vec{k}}(t) \rangle \quad (1.63)$$

où $\hat{\phi}_{\vec{k}}(t)$ désigne un champ d'opérateur type inflaton ou type matière et \mathcal{M}^2 désigne sa masse carrée associée. Les champs que nous employons dans notre modèle sont réels, cependant nous autorisons ici un champ complexe pour les besoins de la démonstration. Le champ $\hat{\phi}_{\vec{k}}(t)$ peut s'écrire

$$\hat{\phi}_{\vec{k}}(t) = \frac{\hat{a}_{\vec{k}}(t) + \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger(t)}{\sqrt{2\epsilon_k(t)}} \quad (1.64)$$

tel que $\hat{\phi}_{-\vec{k}}(t) = \hat{\phi}_{\vec{k}}(t)$ (dans l'espace directe cela se traduit par le fait que le champ d'opérateur est hermitique). Afin de ne pas introduire de cohérence quantique dans l'état initial⁸, on choisi $q_{\vec{k}}(0) \equiv \langle \hat{a}_{\vec{k}}(0) \hat{a}_{-\vec{k}}(0) \rangle = 0$ ce qui restera préservé par la dynamique du système. Nous définissons $\hat{N}_{\vec{k}(t)} = \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger(t) \hat{a}_{\vec{k}}(t)$ l'opérateur ayant pour valeur moyenne $n(t; k)$. Ceci posé on obtient

$$\mathcal{E}_k(t) = \epsilon_k(t) \left[n(t; k) + \frac{1}{2} \right] \quad (1.65)$$

où $\epsilon_k(t) = \sqrt{k^2 + \mathcal{M}^2(t)}$ est la fréquence de la quasi-particule.

Cette énergie peut également être calculée à partir de la définition du tenseur énergie impulsion dans le cas d'une théorie libre. Nous obtenons

$$\mathcal{E}_k(t) = \partial_t \partial_{t'} F(t, t'; k) \Big|_{t'=t} + \epsilon_k^2(t) F(t, t; k) \quad (1.66)$$

où $F(t, t'; k)$ est la fonction statistique à deux points définie comme habituellement par la valeur moyenne du commutateur de $\hat{\phi}(t; k)$ et $\hat{\phi}^\dagger(t'; k)$

Dans un deuxième temps on peut calculer la valeur moyenne du courant de Noether. Ce courant a la particularité d'être conservé et se définit par

$$J^\mu(x) = i \left[\hat{\phi}^\dagger(x) \left(\partial^\mu \hat{\phi}(x) \right) - \left(\partial^\mu \hat{\phi}^\dagger(x) \right) \hat{\phi}(x) \right] \quad (1.67)$$

définissant la densité de charge et le nombre de particule tels que

$$q(t; k) - 1 \equiv J^0(t; k) \quad (1.68)$$

$$\frac{\vec{k}}{\epsilon_k(t)} [1 + 2n(t; k)] \equiv \vec{J}(t; k). \quad (1.69)$$

En exprimant la valeur moyenne du courant en fonction de la fonction statistique on trouve

$$\langle J^0(t; k) \rangle = i (\partial_t - \partial_{t'}) F(t, t'; k) \Big|_{t'=t} - 1 \quad (1.70)$$

$$\langle \vec{J}(t; k) \rangle = 2\vec{k} F(t, t; k). \quad (1.71)$$

En juxtaposant les équations (1.65), (??), (1.69) et (1.71) on obtient

$$\epsilon_k^2(t) = \frac{\partial_t \partial_{t'} F(t, t'; k) \Big|_{t'=t}}{F(t, t; k)} \quad (1.72)$$

⁸la décohérence d'un état quantique sera étudiée au chapitre (3)

et

$$n(t; k) + \frac{1}{2} = \sqrt{F(t, t; k) \partial_t \partial_{t'} F(t, t'; k)}|_{t'=t} \quad (1.73)$$

De la dernière relation on déduit la relation entre le nombre de particules⁹, l'énergie d'une particule de mode k et la fonction statistique

$$n(t; k) + \frac{1}{2} = \epsilon_k(t) F(t, t; k) \quad (1.74)$$

ce qui nous suggère des conditions initiales à choisir pour les propagateurs.

Conditions Initiales

De la relation (1.74) et de la condition initiale sur le nombre de particules dans l'Univers et du champ on déduit que

$$\phi(0) = \phi_0 \neq 0 \quad (1.75)$$

$$G_F(0, 0; k) = \frac{1}{2\sqrt{k^2 + M^2(\phi_0)}}. \quad (1.76)$$

Pour satisfaire à la condition *slow-roll* de la fin de l'inflation, nous choisissons la condition

$$\dot{\phi}(t=0) = 0. \quad (1.77)$$

De la relation (1.72) on en déduit que

$$[\partial_{t'} \partial_t G_F(t, t'; k)]_{t'=t=0} = \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + M^2(\phi_0)} \quad (1.78)$$

et finalement on doit choisir une condition initiale pour $[\partial_t G_F(t, t'; k)]_{t'=t=0}$ que nous prendrons nulle. Dans le cas contraire, il s'agirait d'introduire des cohérences quantiques dans le système comme il sera expliqué plus en détail dans le chapitre (3).

Pour les conditions initiales du propagateur statistique (et de ses dérivées) pour la matière, on prend le même type de conditions en remplaçant $M^2(\phi_0)$ par $m^2(\phi_0)$ et le nombre de particules étant toujours nul initialement.

Il reste à initialiser les propagateurs spectraux. Ceux-là sont une marque de la présence de mécanique quantique dans notre traitement. Il n'est donc pas étonnant de trouver que leur initialisation est fixée par les relations de commutation de la mécanique quantique pour un champ scalaire. On trouve donc que

$$G_\rho(0, 0; k) = D_\rho(0, 0; k) = 0 \quad (1.79)$$

$$[\partial_t G_\rho(t, t'; k)]_{t'=t=0} = [\partial_t D_\rho(t, t'; k)]_{t'=t=0} = 1 \quad (1.80)$$

$$[\partial_{t'} \partial_t G_\rho(t, t'; k)]_{t'=t=0} = [\partial_{t'} \partial_t D_\rho(t, t'; k)]_{t'=t=0} = 0 \quad (1.81)$$

$$(1.82)$$

Muni des équations du mouvement et des conditions initiales associées, le système a une définition unique nous permettant d'obtenir une solution unique pour nos fonctions à deux points et de toutes les quantités qui en découlent.

En négligeant le membre de droite des équations du mouvement on peut postuler des solutions approchées pour les fonctions statistiques, souvent basées sur la quasi-adiabaticité de la réponse, mais tout cela s'écroule quand les termes de collisions entrent en jeu. Dans la section (1.8) je m'attarde un peu sur cette partie de mon travail largement avancée mais non opérationnelle.

⁹Ce nombre de particules s'apparente à celui défini par $\bar{n}(t; k)$ dans le chapitre 3.

1.7 Densité d'énergie et de pression

1.7.1 Densité d'énergie du modèle $\mathcal{O}(N)$

Nos équations du mouvement dérivent d'une action effective et toutes les approximations sont faites au niveau de celle-ci. Les fonctions à deux points, contenant, dans l'approximation gaussienne, toute l'information de la théorie, sont calculées à partir des équations du mouvement résultantes de l'action effective. Pour cette raison, *l'énergie*, au sens de composante ($\mu = 0, \nu = 0$) de la valeur moyenne du tenseur énergie-impulsion, doit être conservée. Celui-ci se définit par

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{2}{\sqrt{-g(x)}} \left. \frac{\delta \tilde{S}[\phi]}{\delta g^{\mu\nu}(x)} \right|_{g^{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}}. \quad (1.83)$$

On peut voir \tilde{S} de deux façons différentes. Soit on la considère comme l'action écrite dans un espace courbe auquel cas il faut définir une théorie complète dans un espace courbe¹⁰ (redéfinir Γ , Σ etc.) soit juste considérer qu'on se place dans un espace min-kowskien mais où on y ajoute, par rapport à la théorie initiale, un champ (classique) gravitationnel à la théorie, en interaction avec nos champs quantiques. Dans ce cas nous pouvons calculer le tenseur énergie-impulsion comme la variation par rapport à la métrique de l'action en présence d'un champ gravitationnel.

Ici nous prenons φ comme champ scalaire pouvant représenter φ ou χ_a . En valeur moyenne on obtient

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \frac{2}{\sqrt{-g(x)}} \frac{\delta \tilde{S}[\varphi]}{\delta g^{\mu\nu}(x)} e^{i\tilde{S}[\varphi]} \Big|_{g^{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}}}{\int \mathcal{D}\varphi e^{i\tilde{S}[\varphi]}}. \quad (1.84)$$

Nommons

$$\begin{aligned} e^{\tilde{W}[J,R,\rho_D]} &= \text{Tr} \left[\rho_D e^{i \int_x J(x)\varphi(x) + i \int_{x,y} R(x,y)\varphi(x)\varphi(y)} \right] \\ &= \int d\varphi_0 d\varphi'_0 \langle \varphi_0 | \rho_D | \varphi'_0 \rangle \\ &\quad \times \int_{\varphi_0}^{\varphi'_0} \mathcal{D}\varphi \exp i \left\{ \tilde{S}[\varphi] + \int_x J(x)\varphi(x) + \frac{1}{2} \int_{x,y} R(x,y)\varphi(x)\varphi(y) \right\} \end{aligned} \quad (1.85)$$

où ρ_D est la matrice densité initiale et $\tilde{W}[J, R, \rho_D]$ est la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green connexes qui dépendent de $J(x)$ et $R(x, y)$ tels que

$$\frac{\delta \tilde{W}[J, R]}{\delta J(x)} \equiv \phi(x) \quad (1.87)$$

et

$$\frac{\delta \tilde{W}[J, R, \rho_D]}{\delta R(x, y)} \equiv \frac{1}{2} [G(x, y) + \phi(x)\phi(y)]. \quad (1.88)$$

Les fonctionnelles J et R dépendent également de la métrique $g^{\mu\nu}(x)$ à travers les intégrales sur les quadrivecteurs. Nous avons que (1.89) peut se réécrire comme

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle = \frac{2}{\sqrt{-g(x)}} \left. \frac{\delta \tilde{W}[0, 0, \rho_D]}{\delta g^{\mu\nu}(x)} \right|_{g^{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}} \quad (1.89)$$

¹⁰de métrique quelconque $g^{\mu\nu}(x)$ de déterminant $g(x)$.

étant donné que les sources J et R ne dépendent pas de la métrique.

L'action effective 2PI s'écrit en fonction de la fonctionnelle génératrice

$$\tilde{\Gamma}[\phi, G] = \tilde{W}[J, R, \rho_D] - \int_y \frac{\delta \tilde{W}[J, R, \rho_D]}{\delta J(y)} J(y) - \int_{z,y} \frac{\delta \tilde{W}[J, R, \rho_D]}{\delta R(y, z)} R(z, y) \quad (1.90)$$

ce qui donne les équations du mouvement à travers les conditions de stationarité

$$\frac{\delta \tilde{\Gamma}[\phi, G]}{\delta \phi(x)} = J(x) \Rightarrow \left. \frac{\delta \tilde{\Gamma}[\phi, G]}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi=\bar{\phi}} = 0 \quad (1.91)$$

$$\frac{\delta \tilde{\Gamma}[\phi, G]}{\delta G(x, y)} = J(x) - \frac{1}{2} R(x, y) \Rightarrow \left. \frac{\delta \tilde{\Gamma}[\phi, G]}{\delta G(x, y)} \right|_{G=\bar{G}(\bar{\phi})} = 0. \quad (1.92)$$

En utilisant les définitions (1.87) et (1.88), on obtient

$$\tilde{\Gamma}[\bar{\phi}, \bar{G}(\bar{\phi})] = \tilde{W}[0, 0, \rho_D] \quad (1.93)$$

et on déduit que

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle = \frac{2}{\sqrt{-g(x)}} \left. \frac{\delta \tilde{\Gamma}[\bar{\phi}, \bar{G}(\bar{\phi})]}{\delta g^{\mu\nu}(x)} \right|_{g^{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu}}. \quad (1.94)$$

Cette démonstration ne nécessite pas une spécification de l'action classique. Ceci est donc modèle-indépendant à partir du moment où on peut exprimer l'action effective $2PI$ associée, sur un espace courbe.

Dans notre théorie, nous devons donc introduire un champ gravitationnel avant de varier l'action effective par rapport à la métrique induite par ce champ

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}[\phi, G, D] = & \int \sqrt{-g(x)} d^4x \left[\frac{1}{2} g^{\rho\sigma}(x) \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi - M^2(\phi) \phi^2 \right] + \frac{i}{2} \text{Tr}[\tilde{G}_{\text{cl}}^{-1} G] + \frac{i}{2} \text{Tr} \text{Ln} G^{-1} \\ & + \frac{i}{2} \text{Tr}[\tilde{D}_{\text{cl}}^{-1} D] + \frac{i}{2} \text{Tr} \text{Ln} D^{-1} + \tilde{\Gamma}_2[\phi, G, D]. \end{aligned} \quad (1.95)$$

où

$$i\tilde{G}_{\text{cl}}^{-1}(x, y) = - \left[\partial_\mu^x \sqrt{-g(x)} g^{\mu\nu}(x) \partial_\nu^x + \sqrt{-g(x)} M^2(\phi) \right] \delta^{(4)}(x - y) \quad (1.96)$$

et

$$i\tilde{D}_{\text{cl}}^{-1}(x, y) = - \left[\partial_\mu^x \sqrt{-g(x)} g^{\mu\nu}(x) \partial_\nu^x + \sqrt{-g(x)} m^2(\phi) \right] \delta^{(4)}(x - y). \quad (1.97)$$

Dans notre approximation, la densité d'énergie est donc

$$E(t) \equiv \langle T_{00}(x) \rangle = N \mathcal{E}(t) \quad (1.98)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) = & -\frac{1}{N} \mathcal{L}[\phi] + \frac{\dot{\phi}^2}{N} + \frac{1}{2} \left[(\partial_{y^0} \partial_{x^0} + \partial_{y^i} \partial_{x^i}) \left(\frac{G(x, y)}{N} + D(x, y) \right) \right]_{y=x} + \\ & + \frac{1}{2N} \left[M^2(\phi) + \frac{\mu}{4} G(x, x) \right] G(x, x) + \frac{1}{2} \left[m^2(\phi) + \frac{\lambda}{12} \frac{N+2}{N} D(x, x) \right] D(x, x) + \\ & - \frac{3}{2\lambda} \left[\mathbb{P}(x, x) + \frac{g^2}{N} G(x, x) \right] \end{aligned} \quad (1.99)$$

où on applique la convention d'Einstein pour les indices i .

$$\mathcal{L}[\phi] = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{M^2}{2} \phi^2 - \frac{\mu}{4!} \phi^4 \quad (1.100)$$

avec pour définitions de $M^2(\phi)$ et $m^2(\phi)$ celles employées en (1.6).

Il est, une fois de plus, commode d'exprimer cette énergie dans l'espace de Fourier étant donné que toute nos quantités sont calculées dans cet espace. L'expression de la densité d'énergie devient donc

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) = & \frac{\dot{\phi}^2}{2N} + \frac{M^2 \phi^2}{2N} + \frac{\mu \phi^4}{4!N} + \frac{1}{2} \int_k \left[\partial_t \partial_{t'} \left(\frac{G_F(t, t'; k)}{N} + D_F(t, t'; k) \right) \right]_{t'=t} + \\ & + \frac{1}{2N} \int_k \left[M^2(\phi) + k^2 + \frac{\mu}{4} \int_q G_F(t, t; q) \right] G_F(t, t; k) + \\ & + \frac{1}{2} \int_k \left[m^2(\phi) + k^2 + \frac{\lambda}{12} \frac{N+2}{N} \int_q D_F(t, t; q) \right] D_F(t, t; k) + \\ & - \frac{3}{2\lambda} \int_k \left[\mathbb{P}_F(t, t; k) + \frac{g^2}{N} G_F(t, t; k) \right]. \end{aligned} \quad (1.101)$$

1.7.2 Conservation de l'énergie

Cette quantité étant l'énergie totale d'un système isolé, elle doit donc être conservée au cours du temps. Nous vérifierons cela plus tard dans les simulations numériques de l'évolution en temps de notre système.

Dans la suite nous décomposons cette densité d'énergie en trois parties : l'énergie classique, de champ-moyen et des collisions. Cette séparation est purement arbitraire et n'a aucune réalité physique étant donné que la seule quantité qui peut être définie est l'énergie totale. Cette séparation correspond juste aux termes du degré d'approximation dans l'action effective. Ainsi nous avons

$$\mathcal{E}_{cl}(t) = \frac{\dot{\phi}^2}{2N} + \frac{M^2 \phi^2}{2N} + \frac{\mu \phi^4}{4!N} \quad (1.102)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{MF}(t) = & + \frac{1}{2} \int_k \left[\partial_t \partial_{t'} \left(\frac{G_F(t, t'; k)}{N} + D_F(t, t'; k) \right) \right]_{t'=t} + \\ & + \frac{1}{2N} \int_k \left[M^2(\phi) + k^2 + \frac{\mu}{4} \int_q G_F(t, t; q) \right] G_F(t, t; k) + \\ & + \frac{1}{2} \int_k \left[m^2(\phi) + k^2 + \frac{\lambda}{12} \frac{N+2}{N} \int_q D_F(t, t; q) \right] D_F(t, t; k) \end{aligned} \quad (1.103)$$

$$\mathcal{E}_{coll}(t) = -\frac{3}{2\lambda} \int_k \left[\mathbb{P}_F(t, t; k) + \frac{g^2}{N} G_F(t, t; k) \right]. \quad (1.104)$$

Nous pouvons tester la conservation de l'énergie totale sur une approximation plus simple. Si nous nous limitons à l'approximation Hartree, qui consiste à annuler les membres de droite des équations du mouvement¹¹, alors la démonstration devient évidente.

¹¹ce qui revient à exprimer un Γ_2 purement local au *Next-to-Leading Order* d'un développement en $1/N$

Dans cette approximation les équations du mouvement deviennent

$$\left[\partial_t^2 + M^2 + \frac{\mu}{6} \phi^2(t) + \frac{\mu}{2} \int_k G_F(t, t; k) \right] \phi(t) = -\frac{g\sqrt{N}}{2} \int_k D_F(t, t; k) \quad (1.105)$$

$$\left[\partial_t^2 + k^2 + M^2 + \frac{\mu}{2} \phi^2(t) + \frac{\mu}{2} \int_k G_F(t, t; k) \right] G_{F,\rho}(t, t'; k) = 0 \quad (1.106)$$

$$\left[\partial_t^2 + k^2 + m^2 + \frac{g}{\sqrt{N}} \phi(t) + \frac{\lambda}{6} \frac{N+2}{N} \int_k D_F(t, t; k) \right] D_{F,\rho}(t, t'; k) = 0. \quad (1.107)$$

La densité d'énergie s'écrit alors simplement $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_{cl}(t) + \mathcal{E}_{MF}(t)$. On cherche à montrer qu'en utilisant les équations du mouvement (1.105) à (1.107), $\dot{\mathcal{E}}(t) = 0$ où le point désigne la dérivée par rapport au temps t . En utilisant le fait que

$$\partial_t G_F(t, t'; k)|_{t'=t} = \partial_t G_F(t', t; k)|_{t'=t} = \partial_{t'} G_F(t, t'; k)|_{t'=t}$$

on trouve

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}(t) = & \frac{\dot{\phi}}{N} \left[\partial_t^2 + M^2 + \frac{\mu}{6} \phi^2 + \frac{\mu}{2N} \int_k G_F(t, t; k) \right] \phi + \frac{g}{2\sqrt{N}} \dot{\phi} \int_k D_F(t, t; k) + \\ & + \left\{ \partial_{t'} \int_k \left[\frac{1}{N} \left(\partial_t^2 + k^2 + M^2 + \frac{\mu}{2} \phi^2 + \frac{\mu}{2} \int_q G_F(t, t; q) \right) G_F(t, t'; k) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\partial_t^2 + k^2 + m^2 + \frac{g}{\sqrt{N}} \phi + \frac{\lambda}{6} \frac{N+2}{N} \int_q D_F(t, t; q) \right) D_F(t, t'; k) \right] \right\}_{t'=t}. \end{aligned} \quad (1.108)$$

En injectant les équations du mouvement¹² (1.105) à (1.107) dans l'expression ainsi trouvée pour $\dot{\mathcal{E}}(t)$, on retrouve bien la conservation de l'énergie.

1.7.3 Densité de pression

On peut également évaluer la densité de pression du système de la même sorte que l'énergie en exprimant la trace des composantes spatiales du tenseur énergie impulsion :

$$3P(t) \equiv \langle T_{ii}(x) \rangle = 3N\mathcal{P}(t)$$

où la convention d'Einstein est appliquée. On trouve comme expression de la pression

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t) = & \frac{\dot{\phi}^2}{2N} - \frac{M^2}{2N} \phi^2 - \frac{\mu}{4!N} \phi^4 + \frac{1}{2} \left[(\partial_{y^0} \partial_{x^0} + \partial_{y^i} \partial_{x^i}) \left(\frac{G(x, y)}{N} + D(x, y) \right) \right]_{y=x} \\ & - \frac{1}{2N} \left[M^2(\phi) + \frac{\mu}{4} G(x, x) \right] G(x, x) - \frac{1}{2} \left[m^2(\phi) + \frac{\lambda}{12} \frac{N+2}{N} \right] D(x, x) \\ & + \frac{3}{2\lambda} \left[\mathbb{P}(x, x) + \frac{g^2}{N} G(x, x) \right]. \end{aligned} \quad (1.109)$$

On peut également l'exprimer dans l'espace de Fourier

¹²en divisant par N les propagateurs dans l'équation du champ macroscopique

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(t) = & \frac{\dot{\phi}^2}{2N} - \frac{M^2}{2N}\phi^2 - \frac{\mu}{4!N}\phi^4 + \frac{1}{2} \int_k \left[\partial_t \partial_{t'} \left(\frac{G_F(t, t'; k)}{N} + D_F(t, t'; k) \right) \right]_{t'=t} \\
& - \frac{1}{2N} \int_k \left[M^2(\phi) - \frac{k^2}{3} + \frac{\mu}{4} \int_q G_F(t, t; q) \right] G_F(t, t; k) \\
& - \frac{1}{2} \int_k \left[m^2(\phi) - \frac{k^2}{3} + \frac{\lambda}{12} \frac{N+2}{N} \int_q D_F(t, t; q) \right] D_F(t, t; k) \\
& + \frac{3}{2\lambda} \int_k \left[\mathbb{P}_F(t, t; k) + \frac{g^2}{N} G_F(t, t; k) \right].
\end{aligned} \tag{1.110}$$

Pour avoir l'équation d'état du système on peut rapporter cette pression à l'énergie trouvée en (1.101). On n'analysera pas la pression du système dans nos résultats de simulations numériques. Cette étape pourrait être faite dans un futur proche.

1.8 Implémentation numérique

Au delà de l'approximation Hartree (au delà des termes locaux dans les *self-energies*), les équation (1.54) à (1.56) deviennent des équations intégral-différentielles non linéaires, difficilement solubles analytiquement sans introduire aucune autre approximation. Il faut donc les résoudre numériquement. Nous avons néanmoins exploité l'homogénéité et l'isotropie des équations pour calculer analytiquement les intégrales angulaires et ne coder que la dépendance radiale des intégrales sur les moments. Cette procédure nous ramène à des équations dans un espace à 1+1 dimension bien que la théorie soit construite dans un espace à 3+1 dimensions. Celle-ci est à son tour transformée de Fourier pour traiter un produit de convolution par un produit direct.

1.8.1 Discrétisation spatiale

Dans l'espace réel, la variable radiale varie entre 0 et L ce qui correspond à une coupure infrarouge dans nos échelles d'énergie, $A_S = \frac{1}{L}$. La taille élémentaire $dl = \frac{1}{\Lambda}$ du réseau¹³, en dessous de laquelle nous n'avons plus accès à la physique.

Dans les expressions des *self-energies* écrites en annexe (A) on remarque que la fonction "bulle" $\Pi(x, y)$ n'est qu'un intermédiaire de calcul et que les seules fonctions nécessaires pour coder les *self-energies* sont I et \mathbb{P} . Ces dernières sont définies avec des intégrales de mémoire du même type que les r.h.s. des équations du mouvement. Néanmoins la fonction "bulle" n'est qu'un simple produit de convolution et purement locale dans le temps. Les *self-energies* par contre sont à la fois le résultat d'une intégrale sur le passé et un produit de convolution dans la variable des impulsions. Pour ce dernier on peut effectuer la transformée de Fourier inverse pour revenir dans l'espace direct, faire le produit des fonctions puis transformer de Fourier le résultat afin d'obtenir la solution dans l'espace des impulsions.

Ceci reste plus rapide à faire, grâce aux routines de calcul de transformée de Fourier rapide, que de faire le produit de convolution directement. On utilise une routine de calcul de transformée de Fourier sinus (`sinf` et `realft`) qui sont des algorithmes pour effectuer ce type de transformée de Fourier en économisant le plus possible le nombre d'opération et donc le temps dédié à ces opérations.

¹³ Λ est alors la coupure Ultra-Violette de notre théorie dans l'espace des moments.

Transformée de Fourier sinus

Avec notre définition de la transformée de Fourier (1.53), et en exploitant les symétries du problème, on déduit que

$$f(r) = \int_0^\Lambda \frac{k^2 dk}{2\pi^2} f(k) \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{ikr \cos \theta} \quad (1.111)$$

où $r = |\vec{r}|$ et $kr \cos \theta$ vient du produit scalaire $\vec{k} \cdot \vec{r}$. On peut effectuer l'intégrale sur l'angle θ ce qui nous mène à l'expression suivante

$$f(r) = \int_0^\Lambda \frac{k^2 dk}{2\pi^2} f(k) \frac{\sin kr}{kr} \quad (1.112)$$

ce qui suggère que la transformée de Fourier unidimensionnelle de $rf(r)$ est $kf(k)$ et réciproquement.

Cette transformée de Fourier sinus est applicable si la fonction à intégrer s'annule aux limites en $k = 0$ et en $k = \Lambda$. Ceci n'est pas forcément vrai dans notre contexte. Cependant nous travaillons à cut-off suffisamment grand pour que les modes UV ne soient pas excités et restent dans le vide. Cela signifie que la physique des UV nous concerne pas et qu'une erreur à ce niveau n'influe pas sur notre dynamique.

Les intégrales sur l'espace deviennent des sommes discrètes dont la borne supérieure est définie par $N_S = \frac{\Lambda}{A_S}$. Comme nous utilisons des transformés de Fourier type sinus où les conditions limites doivent s'annuler, la borne inférieure (le mode 0) et la borne supérieure (le mode N_S) ne sont jamais calculées.

Une conséquence de l'utilisation des algorithmes de transformée de Fourier rapide est que le nombre de modes contenu dans l'intervalle d'énergie étudié doit être une puissance entière de 2, soit $N_S = 2^l$ ou l est un entier naturel choisi de façon à optimiser la gestion de la mémoire physique de l'ordinateur.

Nos intégrales sur les moments sont donc assujetties aux transformations suivantes :

$$\int_0^\Lambda \frac{dk}{2\pi} \int_0^\pi k \frac{d\theta}{2\pi} \int_0^{2\pi} k \sin \theta \frac{d\varphi}{2\pi} f(k) \xrightarrow{\text{sym.}} \int_0^\Lambda \frac{k^2 dk}{2\pi^2} f(k) \xrightarrow{\text{disc.}} \frac{A_S^3}{2\pi^2} \sum_{p=1}^{2^l-1} p^2 f(p) \quad (1.113)$$

pour être implémentées numériquement. Les quantités considérées respectent donc par construction les symétries spatiales du modèle. Néanmoins les résultats qui en découlent ne peuvent être significativement différents d'une discrétisation à l'autre.

1.8.2 Discrétisation temporelle

Il nous reste à discrétiser la variable temporelle, notamment ses dérivées dont une mauvaise discrétisation peut mener à une instabilité numérique du code. Nous avons choisi la discrétisation suivante pour les dérivés temporelles du second ordre

$$\partial_t^2 g(t, t') \xrightarrow{\text{disc.}} \frac{g(n+1, m) - 2g(n, m) + g(n-1, m)}{A_T^2} \quad (1.114)$$

où n et m sont deux entiers naturels définis par $t = nA_T$ et $t' = mA_T$ avec A_T pour pas en temps de la discrétisation. Cette discrétisation a pour avantage d'être symétrique par

rapport au temps où est évaluée la dérivée. Ceci est crucial pour la stabilité de la suite numérique et donc pour le code.

Dans ce code nous ne rencontrons jamais de dérivé du premier ordre exception faite dans les conditions initiales et dans l'énergie. Pour les conditions initiales il importe peu de savoir la façon dont on discrétise la dérivée temporelle sachant que dans la limite des petits pas en temps celle-ci redonne bien la limite des temps continus. Au final une petite erreur sur les conditions initiales n'est pas amplifiée dans l'évolution du système ce qui nous permet de ne pas nous en soucier.

En ce qui concerne l'énergie nous avons besoin tout d'abord de la dérivée temporelle du champ macroscopique. Dans ce cas nous employons la discrétisation suivante

$$\partial_t f(t) \xrightarrow{\text{disc.}} \frac{f(n+1) - f(n-1)}{2A_T} \quad (1.115)$$

dite symétrique au temps t . Dans cette même quantité nous avons besoin de la double dérivée du propagateur, une fois par rapport à t et une deuxième fois par rapport à t' pris au temps $t' = t$. Le principe est le même que pour la dérivée du second ordre. On dérive par rapport t vers l'avant, puis par rapport à t' vers l'arrière. Il en résulte

$$\partial_t \partial_{t'} g(t, t')|_{t'=t} \xrightarrow{\text{disc.}} \frac{g(n+1, n) - g(n+1, n-1) - g(n, n) + g(n, n-1)}{A_T^2}. \quad (1.116)$$

Les temps t et t' peuvent indépendamment se trouver n'importe où sur le contour de Schwinger. Cependant en exploitant les symétries des fonction F et ρ dans l'échange de leurs arguments on peut réduire la taille de nos tableaux en ne prenant que la moitié inférieure à sa diagonale. Dans ce schéma, le temps t parcourt toutes les valeurs permises et le temps t' est pris toujours inférieur ou égal à t . Cette manipulation exige au préalable de séparer les équations du mouvement en plusieurs cas selon la position de t' par rapport à t sur le contour.

On peut encore réduire la taille de nos tableaux en observant que les fonction $\Sigma_{F,\rho}^{G,D}(t, 0; k)$ ont une amplitude décroissante. Ceci signifie que le système a une mémoire limitée et que les intégrales en temps du membre de droite des équations du mouvement (1.55) et (1.56) peuvent être coupées, *e.g.* :

$$\int_0^t dt'' \Sigma_\rho^G G_F(t'', t'; k) \simeq \int_{t-\tau}^t dt'' \Sigma_\rho^G G_F(t'', t'; k) \quad (1.117)$$

où τ est une constante dont la valeur est judicieusement choisie de façon à optimiser les calculs sans perdre d'information significative. Cette simplification permet de réduire considérablement le nombre d'opérations effectuées par le cpu, optimisant le temps et la mémoire physique.

Les simulations numériques présentées dans la section suivante ont été réalisées sur une grille de 64 modes avec un cut-off infrarouge dépendant du cut-off UV. Typiquement les simulations ont été réalisées avec un cut-off UV $\Lambda = 20M_0$ ce qui donne un cut-off IR $A_S = 0.02M_0$. Notre échelle de temps est la masse initiale physique M_0 ($M(\phi_0)$ renormalisée) et non pas la masse bare de l'action classique.

Le pas de temps utilisé dans ces simulations est de $A_T M_0 = 0.05$ avec une mémoire de l'ordre de $10M_0$ soit presque deux périodes d'oscillation du champ. Les simulations ont toutes été faites sur un seul cpu double coeur d'un ordinateur de bureau ne nécessitant pas de parallélisation des calculs.

1.8.3 Conservation de l'énergie

Nous avons vérifié analytiquement que la conservation de l'énergie s'applique bien si toutes les approximations sont faites sur l'action effective et non sur les équations du mouvement. Cependant on peut voir que ce n'est pas tout à fait le cas si on pose nos équations du mouvement sur un réseau discrétisé en temps. La discrétisation (1.116) ne respecte pas la propriété fondamentale de conservation de l'énergie totale d'un système isolé. On peut voir la discrétisation comme une approximation (indispensable à la mise sur ordinateur) effectuée sur les équations du mouvement et donc susceptible de briser la conservation de l'énergie. Cependant nous pouvons, dans le cas extrêmement simple de l'approximation classique d'une théorie libre, calculer analytiquement l'énergie discrète de notre système et vérifier que dans la limite d'un pas en temps nul, elle se résume à une quantité indépendante du temps. On montre aisément que la solution discrète de la théorie classique libre dont l'équation du mouvement se restreint à

$$\ddot{\phi}(t) + M^2\phi(t) = 0 \quad (1.118)$$

ayant pour conditions initiales celles que nous utilisons pour notre modèle est

$$\phi_n = \phi_0 \cos(nA_TM) [1 + \mathcal{O}(A_T^4 M^4)] . \quad (1.119)$$

Pour le démontrer il suffit de prendre la forme discrète de l'équation (1.118)

$$\phi_{n+1} + \phi_{n-1} - (2 - A_T^2 M^2) \phi_n = 0 \quad (1.120)$$

et de prendre les solutions d'une suite de Lucas

$$\phi_n = \xi^n \equiv |\xi|^n e^{ni\theta} . \quad (1.121)$$

En ne gardant que l'ordre en $A_T^2 M^2$, on obtient aisément la solution (1.119).

Par conséquent la densité d'énergie associée étant

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2(t) + \frac{1}{2} M^2 \phi^2(t) \quad (1.122)$$

ayant pour expression discrète¹⁴

$$\mathcal{E}_n = \frac{M^2 \phi_0^2}{2} \left[1 - \frac{A_T^2 M^2}{6} [1 - \cos(2nA_TM)] + \mathcal{O}(A_T^4 M^4) \right] . \quad (1.123)$$

On voit donc que dans la limite $A_T \rightarrow 0$ l'énergie totale de ce système est une constante $\mathcal{E}_0 = \frac{M^2 \phi_0^2}{2}$ (valeur de l'énergie potentielle initiale étant donnée que la vitesse initiale est nulle) et que dans le cas où $A_TM \ll 1$ l'énergie est une fonction oscillante de valeur moyenne $\mathcal{E}_0 \left(1 - \frac{A_T^2 M^2}{6}\right)$, d'amplitude $\frac{A_T^2 M^4 \phi_0^2}{12}$ et de fréquence $\frac{M}{\pi}$.

Dans le cas le plus simple de la théorie classique libre pour un seul champ scalaire, l'énergie discrète n'est pas absolument conservée mais ne l'est qu'en valeur moyenne, on ne doit donc pas s'attendre à ce qu'elle le soit dans notre modèle autrement que par valeur moyenne. On note également que le pas de discrétisation entre dans l'estimation de la valeur moyenne de l'énergie.

¹⁴la discrétisation de la dérivée temporelle étant prise pour $\dot{\phi}(t) \rightarrow \frac{\phi_{n+1} - \phi_{n-1}}{2A_T}$

1.9 Résultats

Dans cette section je présente les résultats obtenus pour l'implémentation numérique des équations (1.54) à (1.56) (et celles similaires pour le propagateur D) en utilisant les méthodes décrites dans la section (1.8). L'approximation étudiée sera l'approximation Hartree où on ne garde que les termes locaux des *self-energies*. Elle revient à ajouter un développement en couplage λ en plus de notre développement en $1/N$. Notons que notre modèle complet contient déjà un développement en couplage μ .

1.9.1 Approximation *Hartree*

Pour le moment, nous allons omettre les termes du membre de droite des équations du mouvement (les collisions) pour se concentrer sur des équations purement locales en temps. Ce type d'approximation, Hartree, a longuement été étudiée dans le passé¹⁵. Ici nous revoyons brièvement ces résultats comme étude préliminaire à l'étude de l'approximation *Next-to-Leading Order*.

Cette approximation consiste à prendre notre modèle complet mais en ne gardant dans l'action effective que les termes à deux boucles au plus. En d'autres termes seuls subsistent les termes locaux qui engendrent la correction de masse dans les équations du mouvement. Soit,

$$\Gamma_2^H[\phi, G, D] = -\frac{\lambda(N+2)}{4!} \int_x D^2(x, x) - \frac{\mu}{4!} \int_x G^2(x, x). \quad (1.124)$$

De la série de "bulles" on ne conserve que le premier terme à un seul vertex. Le terme en $\frac{\mu}{4!}$ est également un terme *Next-to-Leading Order* local que nous incluons dans l'approximation Hartree. Cette action effective donne les *self-energies* suivantes

$$\Sigma_G^H(x, y) = -i\frac{\mu}{2} G(x, x) \delta(x - y) \quad (1.125)$$

$$\Sigma_D^H(x, y) = -i\frac{\lambda}{6} \frac{N+2}{N} D(x, x) \delta(x - y) \quad (1.126)$$

ne comportant aucun terme de collision. Celles-ci, décomposées en F et ρ s'écrivent, dans l'espace de Fourier

$$\left[\partial_{x^0}^2 + M^2 + \frac{\mu}{6} \phi^2(x^0) + \frac{\mu}{2} G_F(x, x) \right] \phi(x^0) = -\frac{g\sqrt{N}}{2} D_F(x, x) \quad (1.127)$$

$$\left[\square_x + M^2 + \frac{\mu}{2} \phi^2(x^0) + \frac{\mu}{2} G_F(x, x) \right] G_F(x, y) = 0 \quad (1.128)$$

$$\left[\square_x + m^2 + \frac{g}{\sqrt{N}} \phi(x^0) + \frac{\lambda}{6} \frac{N+2}{N} D_F(x, x) \right] D_F(x, y) = 0 \quad (1.129)$$

et similairement pour les propagateurs spectraux.

Les résultats présentés ont été réalisés avec un cut-off UV de $\Lambda = 20M_0$, un cut-off IR de $A_S = 0.02M_0$ avec $N = 4$ champs de matière de masse nulle. Le pas en temps utilisé ici est de $M_0 A_T = 0.05$

Sur les figures (1.3) à (1.6) je présente les résultats d'une simulation numérique avec des paramètres mimant au mieux les contraintes observationnelles pour notre Univers.

¹⁵voir références en introduction

Sur la figure (1.3) je présente l'évolution temporelle du champs macroscopique $\phi(t)$ renormalisé par sa condition initiale (en haut) et le transfert d'énergie entre inflaton et fluctuations (en bas). On note que la conservation de l'énergie est respectée en valeur moyenne.

On voit sur cette même figure que le transfert d'énergie du champ aux fluctuations est responsable de la décroissance de l'amplitude de celui-ci. Cet effet est dû à la rétro-action des fluctuations de l'inflaton sur l'équation du champ. Pour des temps très courts on observe une chute brutale de l'amplitude du champ suivie d'une décroissance régulière et finalement une décroissance violente aux environs de $M_0 t = 80$. La première chute est caractéristique des phénomènes tachyoniques de production de particules, tandis que la seconde (se mettant en place tardivement) reflète la résonance paramétrique présente dans les équations du mouvement. La production tachyonique se met en place dès la première oscillation du champ et amplifie une large bande du spectre ce qui lui vaut sa réputation d'efficacité. La résonance paramétrique n'est visible que bien plus tard, même si elle est également active dès le début. Les passages répétés à zéro créent une fréquence de résonance tel deux oscillateurs couplés, responsable d'une bande d'amplification dans le spectre. Lorsque la rétro-action de G devient suffisamment intense pour briser la suprématie du terme proportionnel à ϕ^2 vis à vis de G , l'amplitude du champ décroît brutalement. Sur le modèle $\mathcal{O}(N)$ cette chute abrupte est de courte durée et de faible amplitude. La décroissance du champ se poursuit par une décroissance régulière où progressivement l'énergie du champ se transmet aux fluctuations.

Sur la figure (1.4) je trace le nombre de particules créées en fonction de l'énergie pour cette même simulation. A gauche, sur le spectre des fluctuations de l'inflaton, on voit nettement deux résonances. La première, la plus fine, est celle dû au couplage trilineaire. Le champ crée de la matière par instabilité tachyonique via le terme $g\phi$ dans l'expression de la masse carrée de celle-ci qui crée à son tour des fluctuations via le vertex $\varphi\chi_a\chi_a$ de l'action. En absence de rétro-action de D dans l'équation du champ (donc si on met artificiellement $J(G, D) = 0$), cette bande disparaît comme on le voit sur le spectre de production de particules sur la figure (1.5) sans pour autant modifier qualitativement la production de matière. La deuxième bande de résonance est le produit de la résonance paramétrique via le terme $\mu\phi^2$ dans la masse carrée du propagateur G . On peut vérifier que cette bande répond bien (dans la phase de l'approximation linéaire) à la condition (1.60). La décroissance régulière de la résonance paramétrique intervenant après les temps $80/M_0$ (régime non-linéaire) se manifeste sur ce spectre par un élargissement des bandes de résonance vers l'infra-rouge. Ceci se comprend par le fait que l'amplitude du champ décroît suffisamment lentement entraînant une réduction effective des masses carrées, elle aussi suffisamment lente pour que cela décale petit à petit la fréquence de résonance vers les basses énergies.

Sur la figure (1.6) je trace l'évolution temporelle du nombre de particules de matière et de fluctuation de l'inflaton pour trois valeurs du mode k . La vignette de gauche est prise à très basse énergie et illustre la production explosive (rapide et intense) du nombre de particules de matière pendant que celle de l'inflaton ne croît pas. Rapidement le nombre de particules de matière atteint sa valeur maximale expliquant la décroissance bien plus lente du champ immédiatement après les premières oscillations.

Sur la vignette centrale je choisis de représenter cette même quantité pour un mode situé sur la bande de résonance fine produit par influence de la source (et donc du nombre de particules de matière) sur le champ influant sur la masse carrée du propagateur G . On

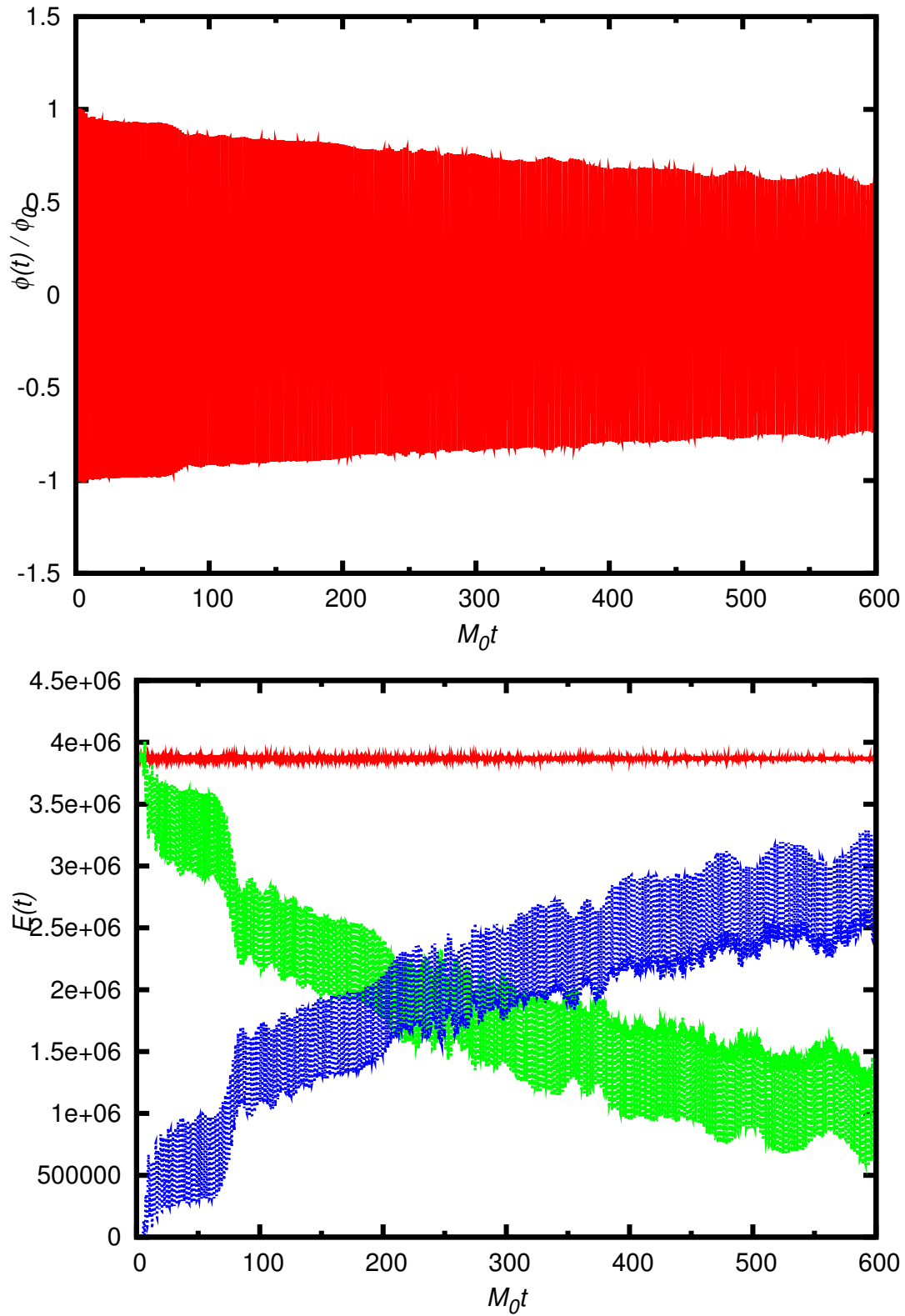


FIG. 1.3 – En haut : Evolution temporelle du champ $\phi(t)/\phi_0$. En bas : Evolution temporelle de l'énergie totale \mathcal{E} (trait pleins - rouge), du champ \mathcal{E}_{cl} (tirets long - vert) et des fluctuations \mathcal{E}_{MF} (pointillés - bleue). La condition initiale est $\phi_0 = 2000M_0$ alors que les couplages sont $\mu = 2 \cdot 10^{-5}$, $\lambda = 6 \cdot 10^{-4}$ et $g = 0.01M_0$. Après un temps de $450M_0t$ le champ a perdu 20% de son amplitude initiale et son énergie a été partiellement transmise aux fluctuations.

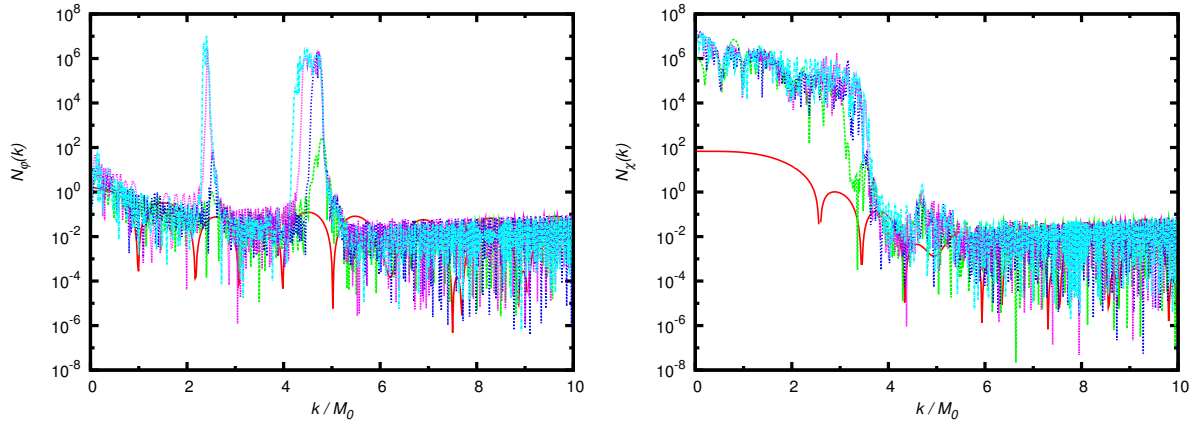


FIG. 1.4 – Spectre de production de particules des fluctuations de l’inflaton (gauche) et de la matière (droite) pour différents temps $M_0 t = 2.5, 35, 100, 300, 600$ (rouge vert bleu foncé violet bleu clair). La condition initiale est $\phi_0 = 2000 M_0$ alors que les couplages sont $\mu = 2 \cdot 10^{-5}$, $\lambda = 6 \cdot 10^{-4}$ et $g = 0.01 M_0$. La matière est essentiellement amplifiée pour les modes de basses-énergie (mécanisme tachyonique) alors que les fluctuations de l’inflaton sont amplifiées à deux bandes de résonance précises.

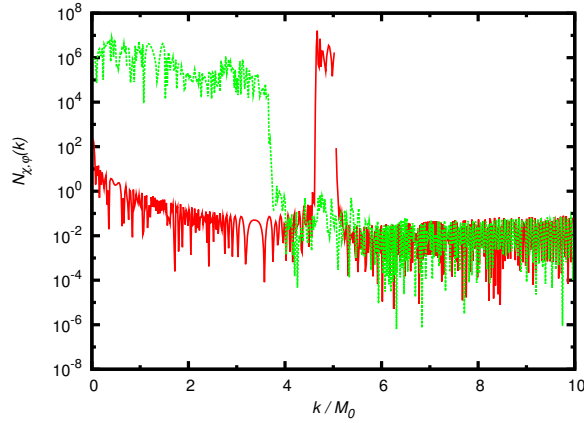


FIG. 1.5 – Spectre de production de particules des fluctuations de l’inflaton (rouge) et de la matière (vert) pour le temps $M_0 t = 450$. La condition initiale est $\phi_0 = 2000 M_0$ alors que les couplages sont $\mu = 2 \cdot 10^{-5}$, $\lambda = 6 \cdot 10^{-4}$ et $g = 0.01 M_0$ où $J(G, D) = 0$ artificiellement. La matière est amplifiée pour les modes de basses-énergie (mécanisme tachyonique) alors que les fluctuations de l’inflaton ne sont amplifiées que sur la bande de résonance paramétrique. La résonance fine présente sur la figure (1.4) disparaît quand on met $J(G, D) = 0$ dans l’équation du champ.

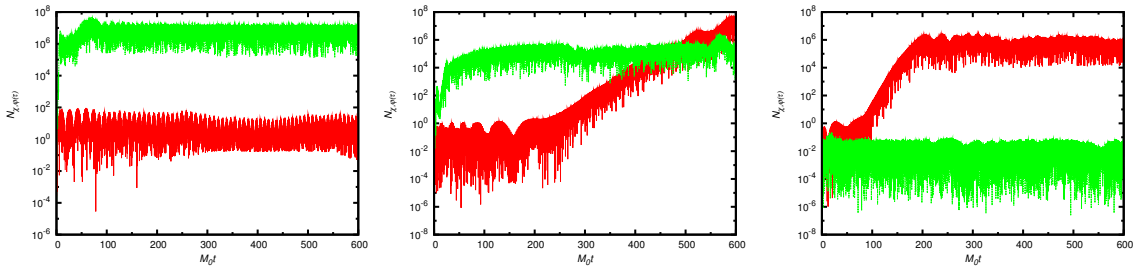


FIG. 1.6 – Evolution temporelle du nombre de particules des fluctuations de l'inflaton (rouge) et de la matière (vert) pour trois modes : à gauche $k = A_S$, au centre $k = 2.34M_0$ et à droite $k = 4.53M_0$. La condition initiale est $\phi_0 = 2000M_0$ alors que les couplages sont $\mu = 2 \cdot 10^{-5}$, $\lambda = 6 \cdot 10^{-4}$ et $g = 0.01M_0$. Le premier est un mode amplifié pour la matière mais pas pour les fluctuations. Le deuxième est amplifié pour les deux et le troisième est amplifié essentiellement pour la matière. L'amplification des modes de matière, par mécanisme tachyonique, est nettement plus rapide que celle des fluctuations de l'inflaton (mécanisme de résonance paramétrique).

voit que ce mode est rapidement peuplé par de la matière et que plus tard la production des fluctuations de l'inflaton peuple à son tour ce mode (phénomène non-linéaire).

La vignette de droite montre cette évolution pour un mode situé en dehors de la bande de résonance de la matière mais dans celle des fluctuations de l'inflaton. Ce mode de production est typique de la résonance paramétrique à savoir une production exponentielle mais dont les effets apparaissent après de nombreuses oscillations du champ. Cette croissance a lieu jusqu'à une valeur maximale d'ordre $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\mu}\right)$. Une fois cette valeur atteinte, l'énergie du champs se transmet à des modes de plus basse énergie produisant cet effet d'élargissement de la bande de résonance évoqué plus haut.

Cette simulation est illustrative de ce qui peut se passer dans le cadre de la cosmologie et du reheating ayant des valeurs de paramètres réalistes. Cependant les valeurs cosmologiques n'ont put être exploitées pour des raisons numériques. Des paramètres extrêmes comme ceux des conditions du reheating demandent une grande puissance numérique pour gérer les très grands et très petits nombres, tout comme les petits effets sur de très grandes échelles de temps.

Les simulations suivantes seront avec des paramètres non physiques qui nous permettent de mieux isoler un mécanisme ou un autre et de tester notre système dans différentes conditions.

Sur la figure (1.7) je compare l'action du couplage g en étudiant deux situations extrêmes. La première (à gauche) où le couplage trilinéaire est d'ordre de la masse initiale de l'inflaton et la deuxième (à droite) où il est nul. Dans ces deux cas la résonance paramétrique est présente mais seul dans le premier cas on produit de la matière.

En absence de couplage trilinéaire, l'évacuation d'énergie ne se fait que dans le degré de liberté de l'inflaton et semble être nettement moins efficace. On voit une fois de plus la chute brutale de l'amplitude du champ aux temps très courts (ici à cause de l'extrême valeur de μ) correspondant à la production massive de fluctuations de l'inflaton qu'on retrouve dans la courbe de l'énergie. Cette chute brutale est suivie par une décroissance plus lente rapidement arrêtée. Cette situation ne permet pas au champ de se désintégrer complètement. Une forte valeur du couplage μ permet une rapide expansion du nombre

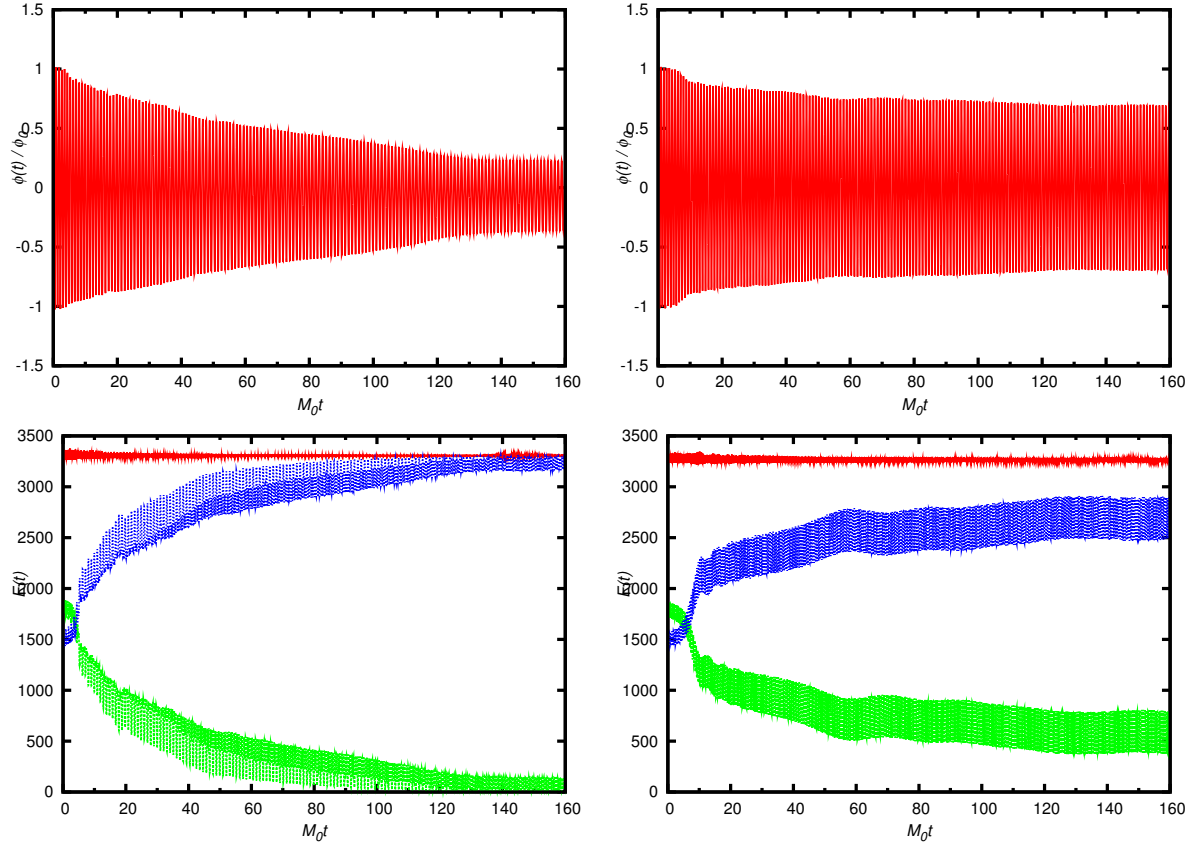


FIG. 1.7 – Evolution temporelle du champ $\phi(t)/\phi_0$ (en haut) ainsi que de l'énergie totale \mathcal{E} (traits pleins - rouge), celle du champ \mathcal{E}_{cl} (tirets long - vert) et celle des fluctuations \mathcal{E}_{MF} (pointillés - bleue). La conditions initiale pour ϕ est $\phi_0 = 20M_0$ alors que les couplages à gauche sont $\mu = \lambda = 1$ et $g = M_0$ (à gauche) et $g = 0$ (à droite). A grand couplage g , après un temps de $150M_0t$ l'énergie du champ à été quasiment totalement transmise aux fluctuations. Il reste un reliquat d'énergie dans le champ ne se désintégrant pas. Pour un g nul, nous sommes au plus proche d'une résonance paramétrique pure. Après un temps de $160M_0t$ l'énergie du champ à été très peu transmise aux fluctuations. Le champs garde 80% de son amplitude initiale. Cependant des particules ont été créé et les fluctuations dominent l'énergie du système.

de particules mais la valeur atteinte est assez petite étant donné qu'elle ne peut dépasser $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\mu}\right)$ par conservation de l'énergie.

En présence d'un couplage trilinéaire (fort) le paysage n'est pas le même. L'action de la masse tachyonique dans l'équation du propagateur de matière permet très rapidement au champ de se désintégrer dans ces degrés de liberté. Cette décroissance régulière a lieu dès les premiers temps et ce jusqu'à épuisement de l'énergie du champ. Celle-ci ne s'annule pas complètement, il reste un relicat qui ne se désintègre pas. Pour la cosmologie ce relicat peut être une forme d'énergie noire au sens d'énergie sous autre forme que de la matière connue. Même si ce modèle est loin de traiter la matière connue de notre Univers il mime ce genre de comportement. On note également que la valeur moyenne autour de laquelle oscille le champ à temps long n'est pas nulle mais négative. Ceci est dû au terme de source. Prenons par exemple l'équation suivante

$$\left(\partial_t^2 + \tilde{M}^2\right) \phi(t) = J_\infty \quad (1.130)$$

où \tilde{M}^2 représente une masse carrée effective constante correspondant au cas où la production de particules a cessé et où le champ se retrouve à osciller autour d'une valeur moyenne à amplitude constante, et où J_∞ symbolise là encore la valeur de la source lorsque le propagateur de matière atteint un état stationnaire. On voit que la solution

$$\phi(t) = A \cos \tilde{M}t + \frac{J_\infty}{\tilde{M}^2} \quad (1.131)$$

est solution de l'équation (1.130), ce qui montre que le champ oscille bien autour d'une valeur moyenne non nulle.

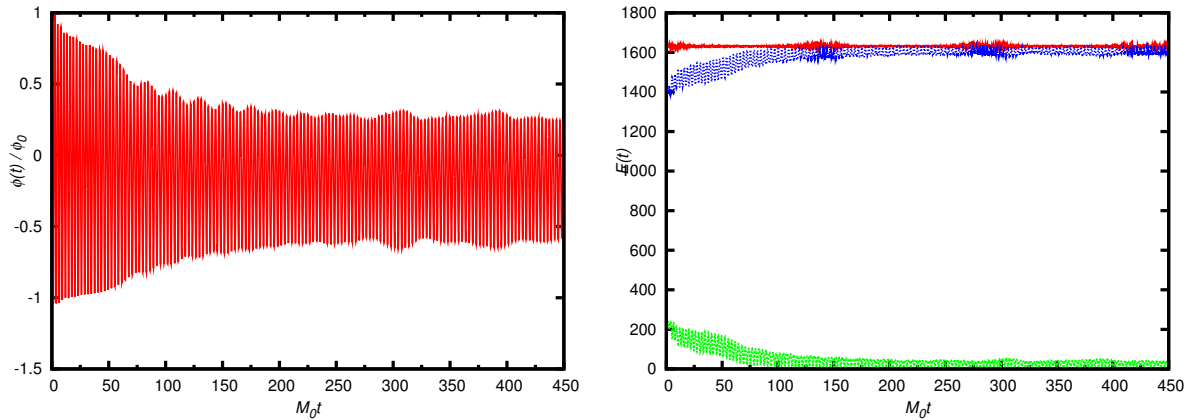


FIG. 1.8 – Evolution temporelle du champ $\phi(t)/\phi_0$ (en haut) ainsi que de l'énergie (en bas) totale \mathcal{E} (traits pleins - rouge), celle du champ \mathcal{E}_{cl} (tirets long - vert) et celle des fluctuations \mathcal{E}_{MF} (pointillés - bleue). La condition initiale pour ϕ est $\phi_0 = 20M_0$ alors que les couplages sont $\mu = 0.1, \lambda = 1$ et $g = 0.5M_0$. Le champ comporte nettement deux phases de décroissance. La première, dû au mécanisme tachyonique, a lieu dès le début et jusqu'aux temps $M_0t = 50$. Elle est caractérisée par une décroissance régulière tandis que la deuxième, caractérisée par une chute brutale de l'amplitude du champ prend le relais à partir de $M_0t = 50$ puis décroît régulièrement jusqu'aux temps $M_0t = 450$ sans complètement s'annuler non plus.

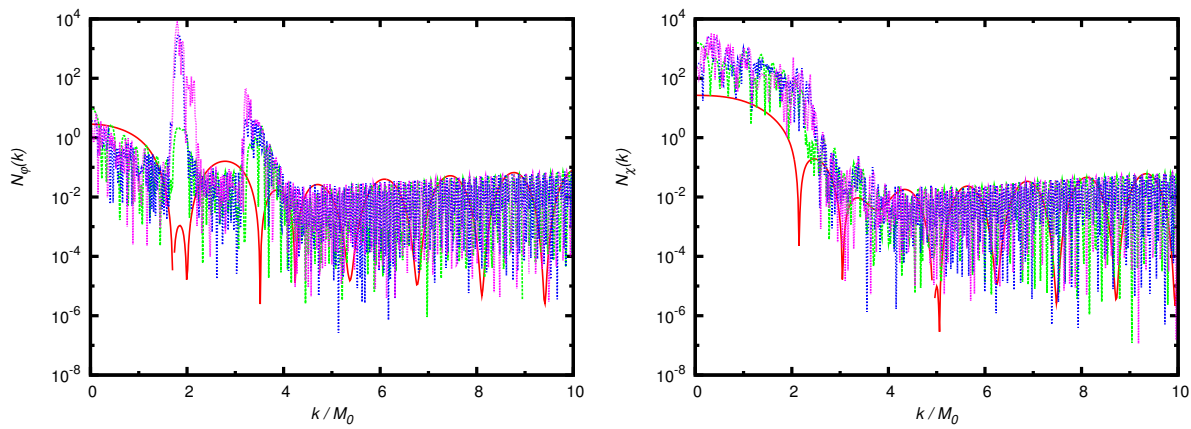


FIG. 1.9 – Spectre de production de particules des fluctuations de l’inflaton (gauche) et de la matière (droite) pour différents temps $M_0 t = 2.5, 25, 70, 300$ (rouge vert bleu foncé violet). La condition initiale pour ϕ est $\phi_0 = 20M_0$ alors que les couplages sont $\mu = 0.1, \lambda = 1$ et $g = 0.5M_0$. La matière est essentiellement amplifiée pour les modes de basses énergies (mécanisme tachyonique) alors que les fluctuations de l’inflaton sont amplifiées à deux bandes de résonance précises. La production explosive de particules des fluctuations de l’inflaton fait brutalement décroître le champ. La décroissance régulière du champ après cette chute violente se manifeste, sur le spectre de l’inflaton, par un élargissement des bandes de résonance vers l’infra-rouge.

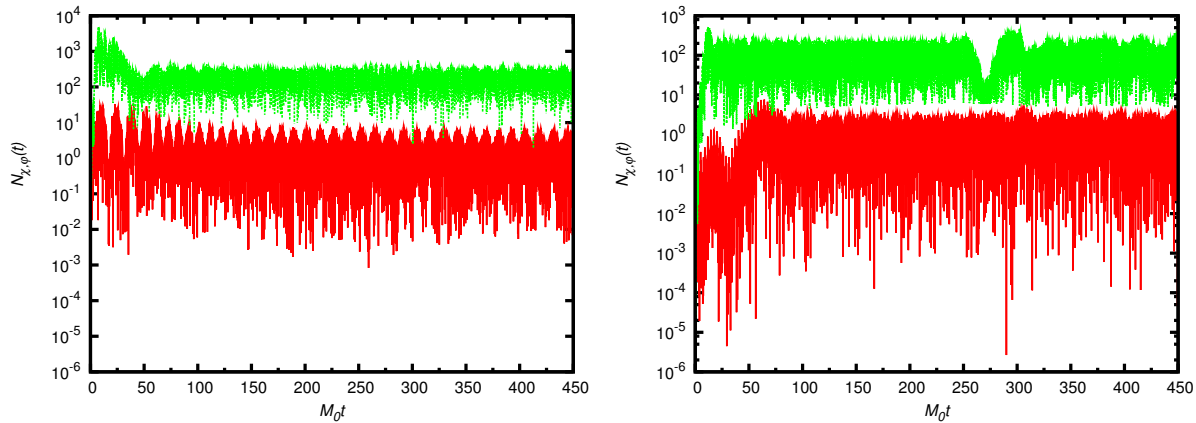


FIG. 1.10 – Evolution temporelle du nombre de particules des fluctuations de l’inflaton (rouge) et de la matière (vert) pour deux modes : à gauche $k = A_S$, et à droite $k = 1.66M_0$. La condition initiale pour ϕ est $\phi_0 = 20M_0$ alors que les couplages sont $\mu = 0.1, \lambda = 1$ et $g = 0.5M_0$. Le premier est un mode amplifié pour la matière mais pas pour les fluctuations alors que le deuxième est amplifié pour les deux. L’amplification des modes de matière, par mécanisme tachyonique, est nettement plus rapide que celle des fluctuations de l’inflaton (mécanisme de résonance paramétrique). On voit nettement que lorsque les modes amplifiés par de résonance paramétrique atteignent leur valeur maximale, l’amplitude du champ décroît brutalement.

Sur la simulation concernant les figures (1.8) à (1.10), nous avons repris une situation intermédiaire mais toujours à un fort couplage λ . Ce couplage étant là essentiellement pour stabiliser le potentiel (il ne participe pas à la production de particules à cette approximation là) cette forte valeur de λ n’est pas gênante en soit.

La décroissance du champ se manifeste une fois de plus en deux étapes. Le mécanisme tachyonique se manifeste par une forte décroissance dès les premières oscillations suivie d'une décroissance régulière jusqu'à ce que la résonance paramétrique prenne le relais vers $M_0 t = 80$. En fin de simulation on voit que le champ a cédé presque toute son énergie aux fluctuations.

Sur le spectre des fluctuations de l'inflaton, on retrouve les deux résonances alors que sur celui de la matière on retrouve toute la plage infra-rouge d'amplifiée. L'évolution temporelle des modes amplifiés montre la distinction entre phénomène tachyonique et résonance paramétrique. Un mode amplifié paramétriquement met plus de temps à atteindre sa valeur maximale, alors que ceux tachyoniques atteignent tout de suite un régime de croisière. On note que dans cette simulation, et pour ces modes-ci, la valeur maximale du nombre de particules de l'inflaton pour un mode amplifié paramétriquement est supérieure à celle de la matière pour un mode amplifié tachyoniquement.

En conclusion à cette étude on peut simplement souligner que la technologie employée pour décrire l'évolution en temps réel de notre système est bien au-delà du nécessaire à cet ordre d'approximation pour laquelle il existe des méthodes bien plus efficaces. Elle prend son rôle à part entière quand il s'agit d'étudier l'ordre sous-dominant du développement en $1/N$. Cette étude s'arrête pour le moment à l'établissement des équations du mouvement correspondantes. La solution numérique mène à des instabilités numériques mal comprise pour le moment.

Conclusions

Les travaux passés se sont intéressés plus particulièrement sur l'approximation classique de ce modèle. Dans ce travail on utilise une théorie quantique effective qui nous permet d'obtenir directement les équations du mouvement pour les valeurs moyennes ne nécessitant aucun processus stochastique.

Dans ce travail j'ai établi les équations du mouvement permettant d'aller au delà de l'approximation de champ moyen incluant les collisions et les effets de mémoire de la dynamique. Les équations sont renormalisées sommairement dans le sens où seule la divergence quadratique est comptabilisée dans une redéfinition des masses. L'implémentation numérique de ces équations a été effectuée dans le but de résoudre la théorie complète mais seule l'approximation *Leading Order* a pu être présentée dans ce travail. Les résultats ne sont pas nouveaux (voir par exemple [42]) mais confirment ce qui a déjà été souligné et préparent l'étude de l'approximation suivante.

A cette approximation, on trouve que la décroissance du champ est due aux deux phénomènes (tachyonique par le vertex trilinéaire et résonance paramétrique par le vertex quartique en $\hat{\phi}$) mais à des échelles de temps séparables. Les phénomènes tachyoniques ont lieu dès que la masse carrée effective de la matière devient négative tandis que la résonance paramétrique se manifeste après de nombreux passages par zéro du champ. Aux temps longs, le champ oscille autour d'une valeur moyenne non nulle et proportionnelle au terme de source dans son équation du mouvement. Dans nos simulations présentées ici, le décroît jamais complètement. Un reliquat d'énergie lui subsiste même si, à ces temps, l'énergie du système est essentiellement dominée par les fluctuations.

La production de particules se fait, pour la matière, dans une large bande d'amplification à basse énergie, tant que $k \leq \frac{g}{\sqrt{N}}|\phi(t)| - m^2$ et ce pendant toute la demi-période où $\phi(t)$ est négatif. Pour les fluctuations de l'inflaton, cette production de particules se fait dans deux bandes de résonances. L'une due au terme proportionnel à $\mu\phi^2$ dans l'expression de la masse carrée des fluctuations de l'inflaton et l'autre due indirectement au terme de source de l'équation du champ à travers ce même terme. Le nombre maximum de particules pouvant être créées dans un mode amplifié dépend du couplage. Plus le couplage est fort et moins on crée de particules. Ce constat sort de la conservation de l'énergie et limite sérieusement les modèles accessibles numériquement dans l'étude de la thermalisation qui, elle, arrive d'autant plus rapidement que les couplages sont forts.

Cette approximation consistait à ne conserver que les termes locaux de l'action effective (1.15) introduisant une infinité de quantité conservées empêchant la thermalisation du système. Une direction de continuation de ce travail consiste à rendre le code opérationnel à l'ordre suivant.

Le *reheating* scalaire présente une base consistante pour l'étude du *reheating* fermionique. Au jour d'aujourd'hui il constitue encore la majeure partie du travail dans ce domaine [50, 52, 51, 33, 34, 43] de la cosmologie étant donné que l'inclusion de fermions demande un traitement quantique et les techniques à notre disposition sont peu nombreuses. Nous allons dans le chapitre suivant étudier en détail un modèle de *reheating* fermionique dans la lignée du travail effectué dans ce chapitre.

Chapitre 2

Reheating fermionique

Il existe peu d'études sur le *reheating* mettant en cause des degrés de liberté fermioniques comme produit de désintégration de l'inflaton. La raison à ce manque n'est pas uniquement due à la nécessité d'un traitement quantique hors-équilibre mais surtout dû à l'image que le blocage de Pauli nous renvoie. En effet si les particules ne peuvent échanger de l'énergie entre elles alors rapidement l'inflaton remplit le domaine d'accessibilité de création de fermions et le processus se trouve bloqué. Néanmoins certains travaux [70, 26, 62, 63, 65, 66, 27, 64, 67, 71] utilisant uniquement au mieux l'approximation de champ-moyen se sont consacrés à cette étude. Certains modèles [62, 27] montrent même que les fermions catalysent la production de bosons. De plus ces degrés de liberté constituent l'essentiel de la matière visible aujourd'hui et jouent un rôle central dans les scénarios de baryogénèse et leptogénèse nous suggérant d'étudier leur contribution au *reheating*.

Des travaux au delà du champ moyen [72] et plus généralement sur la thermalisation [61, 53] de degrés de liberté fermioniques utilisant les techniques d'action effective $2PI$ ont été concluants à ce sujet laissant croire la viabilité de ce projet. L'originalité de celui-ci consiste à travailler avec un inflaton ayant une valeur moyenne dans le vide non nulle pour rendre compte du champ macroscopique de l'inflation et de ne pas considérer de symétrie chirale des fermions *a priori*.

Des travaux [73] comparant *Next-to-Leading Order* et *Next-to-Next-to-Leading Order* dans le cadre du modèle $O(N)$ bosonique, et d'autre [46] comparant *Leading Order* et *Next-to-Leading Order* pour ce même modèle, nous laissent conclure que l'ordre *Next-to-Leading Order* est suffisant et nécessaire pour rendre compte des effets de collisions, de mémoire et les effets hors-couches de masse dont nous avons besoin pour décrire correctement la dynamique du système et son retour à l'équilibre. Une fois de plus nous négligerons les effets de courbure d'espace-temps et considérerons un Univers minkowskien.

Dans cette étude nous établirons un modèle où l'inflaton, scalaire, se désintègre en N champs de matière fermioniques via une interaction de type Yukawa. On inclut à ce modèle une auto-interaction quartique dans le secteur bosonique permettant la renormalisabilité de la théorie ainsi qu'une rétro-action des fluctuations scalaire sur la dynamique de l'inflaton. Après avoir établi un jeu de propriétés utiles spécifiques à la présence de degrés de liberté fermioniques, nous utiliserons les mêmes méthodes développées au chapitre (1) (action effective $2PI$, développement non-perturbatif $1/N...$) pour établir les équations du mouvement que nous prendrons soin de renormaliser avant implémentation numérique.

Les résultats des simulations numériques de notre système s'arrêteront à l'ordre dominant de notre développement et se contenteront de reproduire sommairement les analyses déjà existantes de modèles similaires [62, 27] sans poursuivre en profondeur. Le but étant

l'obtention de résultats numériques inédits à l'ordre suivant pour répondre à la question du rôle des collisions dans la dynamique quantique du *reheating* fermionique.

Nous concluons finalement avec un récapitulatif du travail effectué ainsi que les perspectives envisagées sur le sujet.

2.1 Modèle σ -linéaire $SU(N)$

Le modèle que nous choisissons pour décrire le reheating fermionique est le plus simple permettant d'accéder à nos attentes. Il s'agit du modèle σ -linéaire avec N champs fermioniques, ψ_i , appartenant au groupe $SU(N)$, modélisant la matière de l'Univers, et N_B champs scalaires, $\hat{\phi}^a$, parmi lesquels les $N^2 - 1$ générateurs du groupe $SU(N)$ et un champ (inflaton) supplémentaire. Il en suit que $N_B = N^2$.

On prendra plus tard la limite formelle N infini. Nous choisirons comme convention d'utiliser les lettres $i, j, k, l \dots = 1 \dots N$ pour indexer la composante du groupe $SU(N)$, les lettres $a, b, c, d \dots = 1 \dots N_B$ pour indexer la composante bosonique du vecteur de $O(N_B)$ et enfin les lettres grecques $\alpha, \beta \dots$ pour indexer la composante du spineur dans la représentation de Dirac.

L'action qui en découle est la suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{S} [\hat{\phi}^a, \psi_i, \bar{\psi}_i] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \hat{\phi}^a \partial^\mu \hat{\phi}^a - \frac{M^2}{2} \hat{\phi}^a \hat{\phi}^a - \frac{\lambda}{4! N_B} (\hat{\phi}^a \hat{\phi}^a)^2 + \right. \\ \left. + \bar{\psi}_i \left(i \not{\partial} - m - \frac{g'}{N} \hat{\sigma} \right) \psi_i - \frac{ig}{\sqrt{N}} \bar{\psi}_i \tau_{ij}^a \gamma_5 \psi_j \pi^a \right] \end{aligned} \quad (2.1)$$

où les indices de Dirac ont été volontairement omis et où

$$\hat{\phi}^a = (\hat{\sigma}, \vec{\pi}); \quad a = 1 \dots N_B = N^2$$

représentent la composante longitudinale et celle transverses de l'Inflaton et

$$(\psi_i, \bar{\psi}_j); \quad i, j = 1 \dots N,$$

les N champs fermionique de matière.

On décompose également la composante longitudinale $\hat{\sigma}$ de l'Inflaton en une valeur moyenne non nulle ϕ et ses fluctuations σ comme pour l'étude du *reheating* scalaire,

$$\hat{\sigma}(x^0, \vec{x}) = \phi(x^0) + \sigma(x^0, \vec{x})$$

où $\phi(t)$ est un champs classique macroscopique.

L'action se réécrit alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[\phi, \sigma, \pi^a, \psi_i, \bar{\psi}_i] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2} \partial_\mu \pi^a \partial^\mu \pi^a - \frac{M_\phi^2(\phi)}{2} \phi^2 + \right. \\ \left. - \frac{M_\sigma^2(\phi)}{2} \sigma^2 - \frac{M_\pi^2(\phi)}{2} \pi^a \pi^a - \frac{\lambda}{4! N_B} \left[\sigma^4 + (\pi^a \pi^a)^2 + 4\phi \sigma^3 + 2\sigma^2 \pi^a \pi^a + 4\phi \sigma \pi^a \pi^a \right] + \right. \\ \left. + \bar{\psi}_i [i \not{\partial} - m_\psi(\phi)] \psi_i - \frac{g'}{N} \sigma \bar{\psi}_i \psi_i - \frac{ig}{\sqrt{N}} \bar{\psi}_i \tau_{ij}^a \gamma_5 \psi_j \pi^a \right\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

où

$$\begin{aligned} M_\phi^2(\phi) &= M^2 + \frac{\lambda}{12N_B}\phi^2, \quad M_\sigma^2(\phi) = M^2 + \frac{\lambda}{2N_B}\phi^2, \\ M_\pi^2(\phi) &= M^2 + \frac{\lambda}{6N_B}\phi^2 \quad \text{et} \quad m_\psi(\phi) = m + \frac{g'}{N}\phi, \end{aligned} \quad (2.3)$$

ce qui revient à une séparation effective des masses des champs σ et π .

2.2 Action effective et équation du mouvement

Comme pour le *reheating* scalaire, on utilise le formalisme de l'action effective 2-Particules-Irreductible qui intègre les corrections quantiques et dont le formalisme a été brièvement introduit dans le chapitre précédent¹. Celle-ci est en réalité la double transformé de Legendre de la fonctionnelle génératrice de l'action et peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Gamma[\phi, G, D] = \mathcal{S}[\phi] + \frac{i}{2}\text{Tr}G_{\text{cl}}^{-1}G + \frac{i}{2}\text{Tr}\text{Ln}G^{-1} - i\text{Tr}D_{\text{cl}}^{-1}D - i\text{Tr}\text{Ln}D^{-1} + \Gamma_2[\phi, G, D] \quad (2.4)$$

avec

$$\begin{aligned} iG_{\text{cl},ab}^{-1}(x, y) &= \frac{\delta^2 \mathcal{S}}{\delta \varphi^a(x) \delta \varphi^b(y)} = - \left(\square_x + M^2 + \frac{\lambda}{6N_B}\phi^2(x) \right) \delta_{ab} \delta(x - y) \\ &\quad - \frac{\lambda}{3N_B} \phi_a(x) \phi_b(x) \delta(x - y) \end{aligned} \quad (2.5)$$

et

$$iD_{\text{cl},ij}^{-1}(x, y) = \frac{\delta^2 \mathcal{S}}{\delta \bar{\psi}_j(y) \delta \psi_i(x)} = (i\partial_x - m(\phi)) \delta_{ij} \delta(x - y) \quad (2.6)$$

où φ représente le vecteur des fluctuations $(\sigma, \vec{\pi})$, $\phi^a = \langle \hat{\phi}^a(x) \rangle$ représente la valeur moyenne de chaque composante du vecteur² $\hat{\phi}$ et où G_{cl} et D_{cl} sont respectivement les propagateurs classiques de l'inflaton et de la matière. G et D sont les propagateurs complets de ces mêmes champs, contenant toute les corrections quantiques, à un ordre donné d'un développement en boucle tels que

$$G_{ab}(x, y) = \langle \mathcal{T}_C \varphi_a(x) \varphi_b(y) \rangle \quad (2.7)$$

$$D_{\alpha\beta}^{ij}(x, y) = \langle \mathcal{T}_C \psi_\alpha^i(x) \bar{\psi}_\beta^j(y) \rangle \quad (2.8)$$

où le symbol \mathcal{T}_C représente le produit ordonné en temps sur le contour \mathcal{C} de Schwinger précisé sur la figure (1.1).

Cette action effective diffère de la précédente par la présence d'un signe négatif devant les termes correspondant aux champs fermioniques. Ce signe négatif présent devant chaque boucle de fermions vient des propriétés anticommutatives des nombres de Grassman et des champs de spin- $\frac{1}{2}$.

On peut exprimer $D(x, y)$ différemment en le décomposant en un propagateur avancé et un retardé sous la forme suivante

$$D_{\alpha\beta}^{ij}(x, y) = \Theta_C(x^0 - y^0) D_{\alpha\beta}^{>,ij}(x, y) - \Theta_C(y^0 - x^0) D_{\alpha\beta}^{<,ij}(x, y) \quad (2.9)$$

¹ Pour un développement de l'action effective $2PI$ fermionique on peut voir la référence [61].

² Sachant que $\langle \hat{\sigma}(x) \rangle = \phi(x^0)$ et $\langle \hat{\pi}^a(x) \rangle = 0$.

où $\Theta_{\mathcal{C}}(x^0 - y^0)$ est la fonction qui s'annule pour un argument négatif et qui vaut l'unité pour un argument positif ou nul³ et où

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta}^{>,ij}(x, y) &= \langle \psi_{\alpha}^i(x) \bar{\psi}_{\beta}^j(y) \rangle \\ D_{\alpha\beta}^{<,ij}(x, y) &= \langle \bar{\psi}_{\beta}^j(y) \psi_{\alpha}^i(x) \rangle. \end{aligned} \quad (2.10)$$

On peut noter la propriété d'hermiticité de la matrice⁴ $D_{ij}^{>,<}(x, y)$ par la relation

$$\left(D_{ji}^{>,<}(y, x) \right)^{\dagger} = \gamma_0 D_{ij}^{>,<*}(x, y) \gamma_0. \quad (2.11)$$

On considère également une symétrie supplémentaire qui diagonalise la matrice D_{ij} de la façon suivante $D_{ij}(x, y) = D(x, y) \delta_{ij}$. De même on peut encore décomposer G_{ab} en une composante longitudinale, qui correspond à la fonction de corrélation à deux points des fluctuations de l'inflaton et $N_B - 1$ composantes transverses correspondantes aux fonctions à deux points des fluctuations transverses π .

$$G(x, y) = \begin{pmatrix} G^{\parallel}(x, y) & & & \\ & G^{\perp}(x, y) & & \\ & & \ddots & \\ & & & G^{\perp}(x, y) \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

En dérivant l'action effective successivement par rapport à $\phi(x)$, $G^{\parallel}(x, y)$, $G^{\perp}(x, y)$ et $D(x, y)$ on obtient les équations du mouvement à partir des conditions de stationnarité.

$$\begin{cases} \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi(x)} = 0 \Leftrightarrow \left[\partial_{x^0}^2 + M^2 + \frac{\lambda}{6N_B} \phi^2(x^0) + \frac{\lambda}{2N_B} G^{\parallel}(x, x) + \frac{\lambda(N_B-1)}{6N_B} G^{\perp}(x, x) \right] \phi(x^0) = J \\ \frac{\delta \Gamma}{\delta G^{\parallel}(x, y)} = 0 \Leftrightarrow [\square_x + M_{\sigma}^2(\phi)] G^{\parallel}(x, y) + i \int_z \Sigma^{\parallel}(x, z) G^{\parallel}(z, y) = -i \delta^{(4)}(x - y) \\ \frac{\delta \Gamma}{\delta G^{\perp}(x, y)} = 0 \Leftrightarrow [\square_x + M_{\pi}^2(\phi)] G^{\perp}(x, y) + i \int_z \Sigma^{\perp}(x, z) G^{\perp}(z, y) = -i \delta^{(4)}(x - y) \\ \frac{\delta \Gamma}{\delta D(y, x)} = 0 \Leftrightarrow [i \not{\partial}_x - m_{\psi}(\phi)] D(x, y) - i \int_z \Pi(x, z) D(z, y) = i \delta^{(4)}(x - y) \end{cases} \quad (2.13)$$

où on a défini les *self-energies* par

$$\Sigma^{\parallel}(x, y) = 2i \frac{\delta \Gamma_2[\phi, G^{\parallel}, G^{\perp}, D]}{\delta G^{\parallel}(x, y)} \quad (2.14)$$

$$\Sigma^{\perp}(x, y) = \frac{2i}{N_B - 1} \frac{\delta \Gamma_2[\phi, G^{\parallel}, G^{\perp}, D]}{\delta G^{\perp}(x, y)} \quad (2.15)$$

$$\Pi_{\alpha\beta}(x, y) = -\frac{i}{N} \frac{\delta \Gamma_2[\phi, G^{\parallel}, G^{\perp}, D]}{\delta D_{\beta\alpha}(y, x)} \quad (2.16)$$

et le terme de source par

$$J \equiv J(G^{\parallel}, G^{\perp}, D) = -i \frac{\delta \text{Tr} D_{\text{cl}}^{-1} D}{\delta \phi(x)}. \quad (2.17)$$

³Le signe de l'argument est à prendre en compte sur le contour \mathcal{C} .

⁴Dans l'espace des spineurs.

2.3 Décompositions

2.3.1 Décomposition spectrale

Comme précédemment on décompose chaque propagateur en une composante statistique et une spectrale.

Nous décomposerons les propagateurs bosoniques par

$$X(x, y) = X_F(x, y) - \frac{i}{2} \text{sign}_C(x^0 - y^0) X_\rho(x, y) \quad (2.18)$$

et le propagateur fermionique par

$$D_{\alpha\beta}(x, y) = F_{\alpha\beta}(x, y) - \frac{i}{2} \text{sign}_C(x^0 - y^0) \rho_{\alpha\beta}(x, y) \quad (2.19)$$

où X peut être G ou Σ .

En combinant les définitions (2.10) et (2.19) on peut exprimer aisément

$$F_{ij,\alpha\beta}(x, y) = \frac{1}{2} \langle [\psi_{i,\alpha}(x), \bar{\psi}_{j,\beta}(y)] \rangle \quad (2.20)$$

et

$$\rho_{ij,\alpha\beta}(x, y) = i \langle \{ \psi_{i,\alpha}(x), \bar{\psi}_{j,\beta}(y) \} \rangle. \quad (2.21)$$

En utilisant les définitions (2.20), (2.21) et (2.10) on peut exprimer la fonction statistique sous la forme

$$F_{ij,\alpha\beta}(x, y) = \frac{1}{2} \left[D_{ij,\alpha\beta}^>(x, y) - D_{ij,\alpha\beta}^<(x, y) \right] \quad (2.22)$$

et la fonction spectrale

$$\rho_{ij,\alpha\beta}(x, y) = i \left[D_{ij,\alpha\beta}^>(x, y) + D_{ij,\alpha\beta}^<(x, y) \right]. \quad (2.23)$$

Les composantes se référant aux champs scalaires obéissent aux mêmes symétries que précédemment

$$\begin{aligned} X_F(x, y) &= X_F(y, x) \\ X_\rho(x, y) &= -X_\rho(y, x) \Rightarrow X_\rho(x, x) = 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

alors que les composantes se référant aux champs fermioniques n'ont pas de symétries particulières dans l'échange des arguments dû à leur structure matricielle de spineur. Dans la section suivante nous verrons que nous pouvons décomposer ces quantités (propagateur et *self-energies*) en cinq fonctions qui pourront elles avoir des symétries particulières.

2.3.2 Décomposition de Lorentz

Afin d'obtenir des quantités ayant des propriétés bien définies lors d'une transformation de Lorentz, on peut décomposer la structure matricielle de spin du propagateur fermionique sous la forme suivante

$$D(x, y) = D_S(x, y) + i\gamma_5 D_P(x, y) + \gamma_\mu D_V^\mu(x, y) + \gamma_\mu \gamma_5 D_A^\mu(x, y) + \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} D_T^{\mu\nu}(x, y) \quad (2.25)$$

où

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]. \quad (2.26)$$

Cette décomposition est universelle et unique dans le sens où tout objet de spin- $\frac{1}{2}$ peut s'y prêter. Un certain nombre de ces composantes s'annuleront ou se simplifieront en exploitant les propriétés de symétries que la physique du *reheating* suggère.

On peut inverser la relation suivante et obtenir l'expression de chacune des 16 composantes⁵

$$D_S = \tilde{\text{tr}} D \quad (2.27)$$

$$D_P = -i\tilde{\text{tr}}\gamma_5 D \quad (2.28)$$

$$D_V^\mu = \tilde{\text{tr}}\gamma^\mu D \quad (2.29)$$

$$D_A^\mu = \tilde{\text{tr}}\gamma_5\gamma^\mu D \quad (2.30)$$

$$D_T^{\mu\nu} = \tilde{\text{tr}}\sigma^{\mu\nu} D \quad (2.31)$$

où nous avons défini $\tilde{\text{tr}} \equiv \frac{1}{4}\text{tr}_D$, avec tr_D la trace sur les indices de spin. Chacune de ces composantes est une fonction complexe ce qui nous fait 32 fonctions réelles à coder. De plus, nous ne codons pas directement le propagateur mais nous le séparons en une composante spectrale ρ et une statistique F ce qui multiplie par deux le nombre de fonctions à traiter. Il est donc indispensable de réduire un maximum ce nombre afin de revenir à des systèmes exploitables numériquement. Ce seront les symétries du système qui simplifieront grandement ce jeu de propagateurs.

La relation (2.11) exprimée en terme de fonctions statistique et spectrale prend la forme suivante

$$\begin{aligned} (F_{ji}(y, x))^\dagger &= \gamma_0 F_{ij}(x, y) \gamma_0 \\ (\rho_{ji}(y, x))^\dagger &= -\gamma_0 \rho_{ij}(x, y) \gamma_0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

En utilisant la décomposition de Lorentz définie en (2.25), les relations (2.32) deviennent

$$\begin{aligned} F_{ij}^{(\Gamma)}(x, y) &= \left(F_{ji}^{(\Gamma)}(y, x) \right)^* \\ \rho_{ij}^{(\Gamma)}(x, y) &= - \left(\rho_{ji}^{(\Gamma)}(y, x) \right)^* \end{aligned} \quad (2.33)$$

soit dans l'espace de Fourier

$$\begin{aligned} F_{ij}^{(\Gamma)}(t, t'; \vec{k}) &= \left(F_{ji}^{(\Gamma)}(t', t; \vec{k}) \right)^* \\ \rho_{ij}^{(\Gamma)}(t, t'; \vec{k}) &= - \left(\rho_{ji}^{(\Gamma)}(t', t; \vec{k}) \right)^* \end{aligned} \quad (2.34)$$

ou plus explicitement

$$\text{Re}F_{ij}^{(\Gamma)}(x, y) = \text{Re}F_{ji}^{(\Gamma)}(y, x) \iff \text{Re}F_{ij}^{(\Gamma)}(t, t'; \vec{k}) = \text{Re}F_{ji}^{(\Gamma)}(t', t; \vec{k}) \quad (2.35)$$

$$\text{Im}F_{ij}^{(\Gamma)}(x, y) = -\text{Im}F_{ji}^{(\Gamma)}(y, x) \iff \text{Im}F_{ij}^{(\Gamma)}(t, t'; \vec{k}) = -\text{Im}F_{ji}^{(\Gamma)}(t', t; \vec{k}) \quad (2.36)$$

$$\text{Re}\rho_{ij}^{(\Gamma)}(x, y) = -\text{Re}\rho_{ji}^{(\Gamma)}(y, x) \iff \text{Re}\rho_{ij}^{(\Gamma)}(t, t'; \vec{k}) = -\text{Re}\rho_{ji}^{(\Gamma)}(t', t; \vec{k}) \quad (2.37)$$

$$\text{Im}\rho_{ij}^{(\Gamma)}(x, y) = \text{Im}\rho_{ji}^{(\Gamma)}(y, x) \iff \text{Im}\rho_{ij}^{(\Gamma)}(t, t'; \vec{k}) = \text{Im}\rho_{ji}^{(\Gamma)}(t', t; \vec{k}) \quad (2.38)$$

où $\Gamma = \{S, P, V, A, T\}$.

Comme cette décomposition est universelle, et les relations (2.25) à (2.31) ne sont pas spécifiques aux propagateurs, on peut l'appliquer à la matrice $[i\partial^x - m_\psi(\phi)] D(x, y)$ (membre de gauche des équations du mouvement) tout comme aux termes d'intégrales en

⁵1 scalaire, 1 pseudo-scalaire, 4 vectorielles, 4 pseudo-vectorielles et 6 tensorielles.

temps (membre de droite des équations du mouvement). On obtient pour le membre de gauche de l'équation (2.112) par exemple,

$$\tilde{\text{tr}}[(i\partial - m(\phi))\rho] = (i\partial_\mu \rho_V^\mu) - m(\phi)\rho_S \quad (2.39)$$

$$-i\tilde{\text{tr}}[\gamma_5(i\partial - m(\phi))\rho] = -i(i\partial_\mu \rho_A^\mu) - m(\phi)\rho_P \quad (2.40)$$

$$\tilde{\text{tr}}[\gamma^\mu(i\partial - m(\phi))\rho] = (i\partial^\mu \rho_S) + i(i\partial_\nu \rho_T^{\nu\mu}) - m(\phi)\rho_V^\mu \quad (2.41)$$

$$\tilde{\text{tr}}[\gamma_5\gamma^\mu(i\partial - m(\phi))\rho] = i(i\partial^\mu \rho_P) + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\gamma\delta}(i\partial_\nu \rho_{T,\gamma\delta}) - m(\phi)\rho_A^\mu \quad (2.42)$$

$$\tilde{\text{tr}}[\sigma^{\mu\nu}(i\partial - m(\phi))\rho] = -i(i\partial^\mu \rho_V^\nu - i\partial^\nu \rho_V^\mu)\epsilon^{\mu\nu\gamma\delta}(i\partial_\gamma \rho_{A,\delta}) - m(\phi)\rho_T^{\mu\nu} \quad (2.43)$$

et pour le membre de droite. de (2.112)

$$\tilde{\text{tr}}[A\rho] = A_S\rho_S - A_P\rho_P + A_V^\mu\rho_{V,\mu} - A_A^\mu\rho_{A,\mu} + \frac{1}{2}A_T^{\mu\nu}\rho_{T,\mu\nu} \quad (2.44)$$

$$-i\tilde{\text{tr}}[\gamma_5 A\rho] = A_S\rho_P + A_P\rho_S - iA_V^\mu\rho_{A,\mu} + iA_A^\mu\rho_{V,\mu} + \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\gamma\delta}A_T^{\mu\nu}\rho_{T,\gamma\delta} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\text{tr}}[\gamma^\mu A\rho] &= A_S\rho_V^\mu + A_V^\mu\rho_S - iA_P\rho_A^\mu + iA_A^\mu\rho_P + iA_{V,\nu}\rho_T^{\nu\mu} + iA_T^{\mu,\nu}\rho_{V,\nu} \\ &\quad + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\gamma\delta}(A_{A,\nu}\rho_{T,\gamma\delta} + A_{T,\nu\gamma}\rho_{A,\delta}) \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\text{tr}}[\gamma_5\gamma^\mu A\rho] &= A_S\rho_A^\mu + A_A^\mu\rho_S - iA_P\rho_V^\mu + iA_V^\mu\rho_P + iA_{A,\nu}\rho_T^{\nu\mu} + iA_T^{\mu,\nu}\rho_{A,\nu} \\ &\quad + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\gamma\delta}(A_{V,\nu}\rho_{T,\gamma\delta} + A_{T,\nu\gamma}\rho_{V,\delta}) \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\text{tr}}[\sigma^{\mu\nu} A\rho] &= A_S\rho_T^{\mu\nu} + A_T^{\mu\nu}\rho_S - \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\gamma\delta}(A_P\rho_{T,\gamma\delta} + A_{T,\gamma\delta}\rho_P) \\ &\quad - i(A_V^\mu\rho_V^\nu - A_V^\nu\rho_V^\mu) + \epsilon^{\mu\nu\gamma\delta}(A_{V,\gamma}\rho_{A,\delta} - A_{A,\gamma}\rho_{V,\delta}) \\ &\quad + i(A_A^\mu\rho_A^\nu - A_A^\nu\rho_A^\mu) + i(A_T^{\mu\gamma}\rho_{T,\gamma}^\nu - A_T^{\nu\gamma}\rho_{T,\gamma}^\mu) \end{aligned} \quad (2.48)$$

où $\epsilon^{\mu\nu\gamma\delta}$ est le tenseur de Levi-Civita et où A est définie par la relation

$$\Pi(x, y) = C(x, y) - \frac{i}{2}\text{sign}_C(x^0 - y^0)A(x, y) \quad (2.49)$$

Pour les propagateurs statistiques fermioniques on obtient le même genre de relations avec deux fois plus de termes dans l'expression du membre de droite des équations du mouvement. Un jeu⁶ de termes venant du produit des C par les ρ intégrés entre 0 et y^0 et un autre venant du produit des A par les F intégrés entre 0 et x^0 . Sous cette forme, les e.o.m. deviennent illisibles mais elle est indispensable pour l'exploitation des symétries. Etant donné que les propagateurs trouveront une forme plus simple dans la base de Lorentz, après exploitation des symétries, il est judicieux d'exprimer également les *selfs-energies* dans cette base pour l'implémentation des équations du mouvement sur un ordinateur.

2.4 Exploitation des symétries

Comme pour l'étude précédente, c'est la physique de l'inflation qui détermine les symétries du système. Nous avons vu à cette occasion que l'invariance par translation et l'isotropie est une conséquence des observations du fond diffus cosmologique.

Nous supposons également la symétrie de conjugaison de charge car rien ne nous laisse penser à une violation de ces symétries au moment du *reheating*. Elles simplifient grandement les équations du mouvement.

⁶Nous reverrons cela dans la section (2.6).

La deuxième symétrie discrète que nous allons exploiter est la conjugaison de charge. Cette symétrie est propre à la présence de fermions dans notre théorie. L'univers est sensiblement surchargé en baryon, brisant ainsi la symétrie de conjugaison de charge. Cependant le modèle étudié dans cette thèse n'a pas l'ambition de reproduire le contenu en matière de notre Univers visible.

Dans cette section je passe en revue ces deux symétries discrètes qui, ajoutées à l'homogénéité et l'isotropie de l'Univers, simplifieront sensiblement les équations du mouvement en supprimant quelques unes des 64 fonctions à deux points représentant le propagateur fermionique.

2.4.1 Invariance par parité (P)

L'invariance par parité est la symétrie qui autorise au système de renverser son vecteur position tel que les champs du fermion et de l'anti-fermion se transforment de la façon suivante

$$\psi(x^\mu) \xrightarrow{P} \psi'(x'^\mu) = \gamma_0 \psi(x_\mu) \iff \psi'(x'^0, \vec{x}') = \gamma_0 \psi(x^0, -\vec{x}) \quad (2.50)$$

et

$$\bar{\psi}(x^0, \vec{x}) \xrightarrow{P} \bar{\psi}'(x'^0, \vec{x}') = \bar{\psi}(x^0, -\vec{x}) \gamma_0. \quad (2.51)$$

Le terme de couplage entre les fermions et les pions dans l'action (2.1) est invariant par parité étant donné que le pion est un pseudo-scalaire tout comme le terme $\bar{\psi} \gamma_5 \psi$. Cette action est donc invariante par parité. Si les conditions initiales le sont également, alors la solution aux équations du mouvement le sera également⁷.

Avec les définitions (2.20) et (2.21) des fonctions spectrale et statistique et en utilisant les relations (2.32), il est aisé de montrer que par l'application de l'opérateur *Parité*, celles-ci se transforment en

$$F_{ij,\alpha\beta}(x, y) \xrightarrow{P} F'_{ij,\alpha\beta}(x', y') = [\gamma_0 F_{ij}(x^0, y^0; -\vec{x}, -\vec{y}) \gamma_0]_{\alpha\beta} \quad (2.52)$$

et

$$\rho_{ij,\alpha\beta}(x, y) \xrightarrow{P} \rho'_{ij,\alpha\beta}(x', y') = [\gamma_0 \rho_{ij}(x^0, y^0; -\vec{x}, -\vec{y}) \gamma_0]_{\alpha\beta}. \quad (2.53)$$

Nous remarquons que F et ρ se transforment de la même façon dans l'opération de parité. Par la suite tout ce que nous dirons sur F pourra être extrapolé à ρ tant que nous parlons de l'opérateur *Parité*.

Demander l'invariance par une transformation c'est demander que les propagateurs transformés (en l'occurrence ici les fonctions spectrale et statistique) soient égaux aux propagateurs non transformés. En d'autres termes on demande que

$$F'_{ij,\alpha\beta}(x', y') \equiv F_{ij,\alpha\beta}(x, y),$$

ce qui revient à demander que chaque composante s'égalise une à une. On trouve aisément

⁷Pour l'heure, la stabilité de cette solution est un sujet en cours de réflexion.

en utilisant l'algèbre de Clifford des matrices γ les relation suivantes⁸

$$F_S(x^0, y^0; \vec{x}, \vec{y}) = F_S(x^0, y^0; -\vec{x}, -\vec{y}) \quad (2.54)$$

$$F_P(x^0, y^0; \vec{x}, \vec{y}) = -F_P(x^0, y^0; -\vec{x}, -\vec{y}) \quad (2.55)$$

$$F_V^0(x^0, y^0; \vec{x}, \vec{y}) = F_V^0(x^0, y^0; -\vec{x}, -\vec{y}) \quad (2.56)$$

$$F_V^i(x^0, y^0; \vec{x}, \vec{y}) = -F_V^i(x^0, y^0; -\vec{x}, -\vec{y}) \quad (2.57)$$

$$F_A^0(x^0, y^0; \vec{x}, \vec{y}) = -F_A^0(x^0, y^0; -\vec{x}, -\vec{y}) \quad (2.58)$$

$$F_A^i(x^0, y^0; \vec{x}, \vec{y}) = F_A^i(x^0, y^0; -\vec{x}, -\vec{y}) \quad (2.59)$$

$$F_T^{0i}(x^0, y^0; \vec{x}, \vec{y}) = -F_T^{0i}(x^0, y^0; -\vec{x}, -\vec{y}) \quad (2.60)$$

$$F_T^{ij}(x^0, y^0; \vec{x}, \vec{y}) = F_T^{ij}(x^0, y^0; -\vec{x}, -\vec{y}) \quad (2.61)$$

On peut en plus associer à celà l'invariance par translation dans l'espace qui nous permet de prendre la transformé de Fourier spatiale⁹ de nos quantités. On obtient alors

$$F_S(t, t'; \vec{k}) = F_S(t, t'; -\vec{k}) \quad (2.62)$$

$$F_P(t, t'; \vec{k}) = -F_P(t, t'; -\vec{k}) \quad (2.63)$$

$$F_V^0(t, t'; \vec{k}) = F_V^0(t, t'; -\vec{k}) \quad (2.64)$$

$$F_V^i(t, t'; \vec{k}) = -F_V^i(t, t'; -\vec{k}) \quad (2.65)$$

$$F_A^0(t, t'; \vec{k}) = -F_A^0(t, t'; -\vec{k}) \quad (2.66)$$

$$F_A^i(t, t'; \vec{k}) = F_A^i(t, t'; -\vec{k}) \quad (2.67)$$

$$F_T^{0i}(t, t'; \vec{k}) = -F_T^{0i}(t, t'; -\vec{k}) \quad (2.68)$$

$$F_T^{ij}(t, t'; \vec{k}) = F_T^{ij}(t, t'; -\vec{k}) \quad (2.69)$$

L'invariance par rotation implique que les fonctions $F_V^i(t, t'; \vec{k})$, $F_A^i(t, t'; \vec{k})$ et $F_T^{0i}(t, t'; \vec{k})$ s'écrivent forcément sous la forme $\frac{k^i}{k} F_{V,A,T}(t, t'; k)$. La fonction antisymétrique $F_T^{ij}(t, t'; \vec{k})$, quand à elle, peut s'exprimer à l'aide du tenseur de Levi-Civita par $F_T^{ij}(t, t'; \vec{k}) = \epsilon_{ijl} \frac{k^l}{k} F_{T_2}(t, t'; k)$. En exploitant l'invariance par rotation on trouve que

$$F_P(t, t'; k) = -F_P(t, t'; k) = 0 \quad (2.70)$$

$$\frac{\vec{k}}{k} F_V(t, t'; k) = \frac{\vec{k}}{k} F_V(t, t'; k) \quad (2.71)$$

$$F_A^0(t, t'; k) = -F_A^0(t, t'; k) = 0 \quad (2.72)$$

$$\frac{\vec{k}}{k} F_A(t, t'; k) = -\frac{\vec{k}}{k} F_A(t, t'; k) = 0 \quad (2.73)$$

$$\frac{\vec{k}}{k} F_T(t, t'; k) = \frac{\vec{k}}{k} F_T(t, t'; k) \quad (2.74)$$

$$F_T^{ij}(t, t'; \vec{k}) = \epsilon^{ijl} \frac{k^l}{k} F_{T_2}(t, t'; k) = -\epsilon^{ijl} \frac{k^l}{k} F_{T_2}(t, t'; k) = 0. \quad (2.75)$$

L'invariance par rotation ne nous apporte aucune information supplémentaire sur F_S , F_V^0 , F_V et F_T .

⁸Ici les lettres latines i et j dénotent les composantes spatiales d'un (pseudo)-vecteur ou tenseur.

⁹Définie dans le chapitre 1 par la relation (1.53).

2.4.2 Invariance par conjugaison de charge (C)

L'invariance par conjugaison de charge est une invariance par rotation dans l'espace des spins. Par conséquent elle ne concerne pas l'espace-temps mais transforme un spineur de type ψ en un spineur de type $\bar{\psi}$ et vice versa. La transformation de conjugaison de charge s'exprime par

$$\psi_\alpha(x) \xrightarrow{C} \psi'_\alpha(x') = \eta_C [C\bar{\psi}^t(x)]_\alpha \quad (2.76)$$

et

$$\bar{\psi}_\alpha(x) \xrightarrow{C} \bar{\psi}'_\alpha(x') = \eta_C^* [\psi^t(x)C]_\alpha \quad (2.77)$$

où C est une matrice de transformation anti-hermitienne unitaire qui s'exprime dans la base de Dirac par

$$C = i\gamma^2\gamma^0 \quad (2.78)$$

Une des propriétés de cette matrice est qu'elle commute avec la matrice γ_0 . Nous avons permis à cette transformation une phase représentée par le nombre complexe de module unité η_C . Cette phase n'aura aucun rôle sur les propagateurs étant donné que nous serons toujours amené à évaluer des produits de spineur avec un anti-spineur.

Avec la définition des fonctions spectrale et statistique (2.20) et (2.21) on montre que par l'application de l'opérateur *Conjugaison de charge*, celles-ci se transforment en

$$F_{ij,\alpha\beta}(x, y) \xrightarrow{C} F'_{ij,\alpha\beta}(x', y') = [CF_{ji}^t(y, x)C^\dagger]_{\alpha\beta} \quad (2.79)$$

et

$$\rho_{ij,\alpha\beta}(x, y) \xrightarrow{C} \rho'_{ij,\alpha\beta}(x', y') = -[C\rho_{ji}^t(y, x)C^\dagger]_{\alpha\beta} \quad (2.80)$$

On trouve donc que les composantes ont les propriétés de symétries suivantes

$$F_{ij,S}(x, y) = F_{ji,S}(y, x) \quad (2.81)$$

$$F_{ij,P}(x, y) = F_{ji,P}(y, x) \quad (2.82)$$

$$F_{ij,V}^\mu(x, y) = -F_{ji,V}^\mu(y, x) \quad (2.83)$$

$$F_{ij,A}^\mu(x, y) = F_{ji,A}^\mu(y, x) \quad (2.84)$$

$$F_{ij,T}^{\mu\nu}(x, y) = -F_{ji,T}^{\mu\nu}(y, x) \quad (2.85)$$

Si on ajoute à cela l'invariance par parité, par rotation, par translation et les propriétés (2.34) on trouve finalement

$$F_{ij,P}(t, t'; k) = F_{ij,A}^\mu(t, t'; k) = F_{ij,T_2}(t, t'; k) = 0 \quad (2.86)$$

$$F_{ij,S}(t, t'; k) = F_{ji,S}(t', t; k) \in \mathbb{R} \quad (2.87)$$

$$iF_{ij,0}(t, t'; k) \equiv F_{ij,V}^0(t, t'; k) = -F_{ji,V}^0(t', t; k) \in i\mathbb{R} \quad (2.88)$$

$$F_{ij,V}(t, t'; k) = F_{Vji,0}(t', t; k) \in \mathbb{R} \quad (2.89)$$

$$F_{ij,T}(t, t'; k) \equiv F_{ij,T_2}(t, t'; k) = F_{ji,T_2}(t', t; k) \in \mathbb{R} \quad (2.90)$$

et pour ρ

$$\rho_{ij,P}(t, t'; k) = \rho_{ij,A}^\mu(t, t'; k) = \rho_{ij,T_2}(t, t'; k) = 0 \quad (2.91)$$

$$\rho_{ij,S}(t, t'; k) = -\rho_{ji,S}(t', t; k) \in i\mathbb{R} \quad (2.92)$$

$$i\rho_{ij,0}(t, t'; k) \equiv \rho_{ij,V}^0(t, t'; k) = \rho_{ji,V}^0(t', t; k) \in \mathbb{R} \quad (2.93)$$

$$\rho_{ij,V}(t, t'; k) = -\rho_{ji,V}(t', t; k) \in i\mathbb{R} \quad (2.94)$$

$$\rho_{ij,T}(t, t'; k) \equiv \rho_{ij,T_2}(t, t'; k) = -\rho_{ji,T_2}(t', t; k) \in i\mathbb{R}. \quad (2.95)$$

Du à l'hypothèse de symétrie de $SU(N)$, le propagateur fermionique est diagonal dans les indices i et j . On peut simplement omettre leur écriture dans les équations (2.87) à (2.95) ainsi que celles à venir.

De toute cette analyse, il reste au final à implémenter uniquement le champ ϕ , les propagateurs bosoniques¹⁰ G_F^\perp et G_ρ^\perp ainsi que les propateurs fermioniques F_S, F_0, F_V, F_T et leur analogue spectral $\rho_S, \rho_0, \rho_V, \rho_T$. A ces fonctions s'ajoutent les *selfs-energies* qui n'en sont que des combinaisons.

2.5 Développement en $1/N$ et approximation Next-to-Leading Order

Jusqu'ici nos équations sont exactes mais pour aller plus loin et implémenter numériquement nos équations il faut donner une forme aux *selfs-energies* des équations du mouvement. Pour cela nous devons exprimer l'action effective en remplaçant le terme Γ_2 par ce sur quoi nous voulons focaliser notre étude.

Comme dans le cas du *reheating* scalaire, ce que nous voulons étudier avant tout c'est l'influence des collisions sur la production de particules (matière ou fluctuations de l'inflaton) et la thermalisation. Pour augmenter l'effet de ces termes on veut pouvoir explorer des couplages fermions-bosons ($\propto g$ et $\propto g'$) non-perturbatifs tout en ayant une systématique d'approximation qui conserve la stabilité de la théorie. Une fois de plus nous utilisons alors un développement en $1/N$ sachant que le nombre de champs fermioniques doit être grand.

Etant donné la relation entre N et N_B , nous avons automatiquement un nombre de champs scalaire très grand. Nous utiliserons cela pour faire tendre formellement N_B vers l'infini (approximation dite *large- N_B*) et ainsi découpler $G^\parallel(x, y)$ du système d'équation (2.13). A ce niveau, les fluctuations de l'inflaton n'entrent plus du tout en jeu. Le système n'est alors composé que de l'inflaton, de fluctuations transverses bosoniques et de matière fermionique. Ceci est faisable car dans cette limite, le terme proportionnel à G^\parallel dans l'équation du champ ϕ tend vers zéro quand N_B tend vers l'infini, et il en est de même pour Γ_2 . J'attire l'attention sur le fait que le terme proportionnel à ϕ^2 ne tend pas vers zéro dans cette limite car la valeur initiale du champs est fixé de telle sorte que ce terme soit $\mathcal{O}(1)$.

Nous irons chercher l'ordre sous dominant $\mathcal{O}(N)$ dans le développement en $1/N$. Cet ordre nous permet de capturer les premiers graphes contenant les collisions entre fermions et bosons sans inclure la somme de bulles que nous avons traité dans le cas du *reheating* scalaire. Cependant nous gardons le graphe en "8" ne faisant intervenir que des propagateurs transverses car il est d'ordre $\mathcal{O}(N^2)$ (*Leading Order*) sans prendre la contribution du type "Hartree" qui s'avère être d'ordre $\mathcal{O}(1)$ étant le premier terme de la série de bulles.

2.5.1 Expression de Γ_2

Notre terme contrôlant l'approximation de la théorie, Γ_2 , en tenant compte de ce qui a été dit dans le chapitre précédent, contient uniquement deux graphes 2PI, constructibles

¹⁰Nous verrons à la section (2.5) que dans nos approximations les propagateurs $G_{F,\rho}^\parallel$ découpent du système d'équations (2.13).

avec les vertex de la théorie (2.2) d'ordre $O(N)$. De ces deux contributions, l'une est locale et l'autre non-locale, toutes deux constituées que de propagateurs complet G^\perp ou D comme il est représenté sur la figure (2.1).

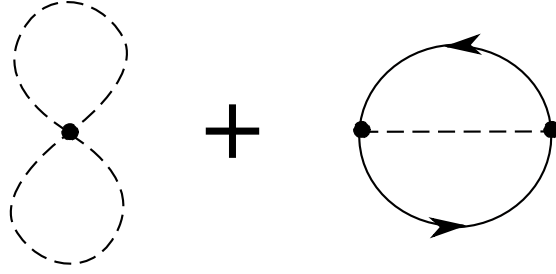


FIG. 2.1 – Expression diagrammatique du terme Γ_2 de l'action effective. La ligne pleine symbolise un propagateur complet D de fermions et la ligne tiretée symbolise un propagateur transverse complet G^\perp . Cette approximation *Next-to-Leading Order* du développement en $1/N$ de l'action effective ne comporte que deux contributions : l'une locale ne faisant pas intervenir de fermions et l'autre non-locale.

L'expression intégrale de Γ_2 devient

$$\begin{aligned} \Gamma_2[\phi, G^\parallel, G^\perp, D] = & -\frac{\lambda}{4!N_B} \int_x G_{aa}^\perp(x, x) G_{bb}^\perp(x, x) + \\ & -\frac{g^2}{2N} \int_{x,y} \tau_{ij}^a (\gamma_5)_{\alpha\beta} D_{\beta\beta'}^{jj'}(x, y) \tau_{j'i'}^b (\gamma_5)_{\beta'\alpha'} D_{\alpha'\alpha}^{i'i}(y, x) G_{ba}^\perp(x, y). \end{aligned} \quad (2.96)$$

Nous avons pris, une fois de plus, comme raccourci de notation

$$\int_x \equiv \int_{\mathcal{C}} dx^0 \int d^3\vec{x}$$

où l'intégrale en temps s'effectue sur le contour fermé \mathcal{C} de Schwinger représenté sur la figure (1.1) comme dans le cas des champs scalaires.

On peut simplifier l'expression de Γ_2 en utilisant le fait que $G_{ab}^\perp(x, y) = \delta_{ab} G^\perp(x, y)$, $D_{\alpha\beta}^{ij}(x, y) = \delta_{ij} D_{\alpha\beta}(x, y)$ et la relation [74]

$$\tau^a \tau^b = \frac{1}{2N} \delta_{ab} \mathbb{I}_N + \frac{i}{2} f_{abc} \tau^c + \frac{1}{2} d_{abc} \tau^c. \quad (2.97)$$

Dans cette relation \mathbb{I}_N est la matrice identité $N \times N$, f_{abc} les constantes de structure du groupe $SU(N)$ (tenseur antisymétrique combinant les bosons en une composante antisymétrique) et les d_{abc} sont les analogues des constantes de structure mais pour une composante symétrique. On souligne que f_{aac} et d_{aac} sont tous les deux nuls. Le premier par antisymétrie du tenseur et le deuxième car il peut être vu comme une série de matrices $(N^2 - 1) \times (N^2 - 1)$ indicées par c , chacune de trace nulle.

Une trace sur les indices a, b multiplie par $N_B - 1$ le terme considéré alors qu'une trace sur les indices i, j multiplie par N le terme considéré. Etant dans la limite *large-N* et par conséquent la limite *large-N_B*, on peut considérer que $N_B - 1 \sim N_B$ et ainsi simplifier le pré-facteur de chaque intégrale dans l'expression de Γ_2 . Il résulte donc

$$\begin{aligned} \Gamma_2[\phi, G^\parallel, G^\perp, D] = & -\frac{\lambda}{4!} (N_B - 1) \int_x G^{\perp 2}(x, x) + \\ & + \frac{ig^2}{4} \frac{N_B}{N} \int_{x,y} \text{tr}_D [\gamma_5 D(x, y) \gamma_5 D(y, x)] G^\perp(x, y). \end{aligned} \quad (2.98)$$

Le premier terme serait l'expression de Γ_2 au *Leading Order* de ce même développement. Cet ordre ne contient aucune contribution non-locale ne permettant pas l'étude de l'influence des collisions dans la dynamique du système. Le deuxième terme, seul terme *Next-to-Leading Order* de cette théorie, nous donne accès à la physique qui nous intéresse dans cette étude.

Il faut noter qu'il s'agit bien d'un développement à grand nombre de fermions (et par conséquent de bosons) et non un développement en couplage malgré l'apparente simplicité de l'action effective. Cette approximation peut rendre compte de théories à très fort couplages. Elle exige uniquement un grand nombre de champs pour garder sa cohérence et ne nécessite aucunement des petites valeurs de couplage. Cette propriété est cependant formelle. En pratique la renormalisation viendra la briser en demandant que les termes habillant les masses restent petits devant le cut-off de la théorie pour que celle-ci ait un sens.

Avec cette expression de Γ_2 on peut désormais compléter le développement analytique des équations du mouvement en exprimant les *self-energies* en fonction des propagateurs complets.

2.5.2 Calcul des self-energies

De l'expression de Γ_2 que nous venons d'établir et en considérant l'ordre de notre approximation, nous pouvons en déduire l'expression des *self-energies* d'après les définitions (2.14). On obtient

$$\Sigma^\perp(0)(x) = \frac{\lambda}{6} G^\perp(x, x) \quad (2.99)$$

$$\Pi(0)(x) = 0 \quad (2.100)$$

$$\bar{\Sigma}^\perp(x, y) = -\frac{g^2}{2N} \text{tr}_D [\gamma_5 D(x, y) \gamma_5 D(y, x)] \quad (2.101)$$

$$\bar{\Pi}(x, y) = \frac{g^2}{2} \frac{N_B}{N^2} \gamma_5 D(x, y) \gamma_5 G^\perp(x, y) \quad (2.102)$$

$$J(G, D) = g' \text{tr}_D [D(x, x)]. \quad (2.103)$$

Comme nous l'avons vu, le terme local de notre approximation ne contient aucune ligne fermionique ce qui se résume par un $\Pi(0)$ nul et donc aucune correction de masse à l'équation du fermions venant du développement en $1/N$. Nous remarquons une fois de plus un terme de source dans l'équation du champ. Ce terme est issu du couplage trilineaire entre σ et $\psi\bar{\psi}$. Ce vertex est proportionnel à g' et non g comme celui entre π et $\psi\bar{\psi}$. En pratique on prendra toujours $g' = g$ dans les équations à venir. Cette différence est introduite juste pour distinguer les deux couplages qui ont deux normalisations de champ différentes mais elle reste formelle étant donné nos objectifs dans cette analyse.

Après nous être donné une approximation et avoir déduit les *self-energies* qui en découlent nous pouvons écrire les équations du mouvement de la théorie considérée que nous implémenterons numériquement.

2.6 Equations du mouvement

Les equations du mouvement génériques écrites dans le système (2.13) ne prennent forme qu'après explicitation des *self-energies* en fonction des propagateurs complets. Pour

ce, nous avons dû donner, à notre théorie, une approximation adaptée à notre étude et ainsi donner une forme concrète aux équations du mouvement. Dans cette section nous allons appliquer les résultats obtenus dans les sections précédentes à nos équations du mouvement afin de les finaliser.

2.6.1 Secteur bosonique

Dans ce secteur nous retrouvons essentiellement la même architecture des équations du mouvement du chapitre 1 en remplaçant les masses par leur expression appropriée. Dans l'équation du champ, nous notons un signe positif devant le terme de source contrairement à l'étude sur le *reheating* bosonique. Ceci est dû à la présence d'une boucle de fermions dans l'expression du courant.

En utilisant la décomposition spectrale nous trouvons les équations suivante pour le secteur bosonique¹¹

$$[\partial_{x^0}^2 + M_{\phi, MF}^2(x)] \phi(x^0) = g' \text{tr}_D [D_F(x, x)] \quad (2.104)$$

$$[\Box_x + M_{\pi, MF}^2(x)] G_F^\perp(x, y) = \int_0^{y^0} dz \Sigma_F^\perp(x, z) G_\rho^\perp(z, y) - \int_0^{x^0} dz \Sigma_\rho^\perp(x, z) G_F^\perp(z, y) \quad (2.105)$$

$$[\Box_x + M_{\pi, MF}^2(x)] G_\rho^\perp(x, y) = - \int_{y^0}^{x^0} dz \Sigma_\rho^\perp(x, z) G_\rho^\perp(z, y) \quad (2.106)$$

$$(2.107)$$

avec pour expressions des masses carrés de champs-moyen :

$$M_{\phi, MF}^2(x) = M_{\pi, MF}^2(x) \equiv M_{MF}^2(x) = M^2 + \frac{\lambda}{6N_B} \phi^2(x^0) + \frac{\lambda}{6} G_F^\perp(x, x). \quad (2.108)$$

Nous remarquons ici que les masses de l'équation du champ et de l'équation du propagateur du pion sont les mêmes. Si nous nous focalisons sur le terme proportionnel à ϕ^2 nous reconnaissons la marque d'une résonnance paramétrique responsable d'un pic sur le spectre des bosons. Nous remarquons également une rétro-action des bosons sur le champ et sur eux-même à travers le terme local de la *self-energy* des bosons.

Les contributions non-locales des *self-energies* se décomposent en

$$\overline{\Sigma}_F^\perp(x, y) = -\frac{g^2}{2N} \text{tr}_D \left[\gamma_5 F(x, y) \gamma_5 F(y, x) + \frac{1}{4} \gamma_5 \rho(x, y) \gamma_5 \rho(y, x) \right] \quad (2.109)$$

$$\overline{\Sigma}_\rho^\perp(x, y) = -\frac{g^2}{2N} \text{tr}_D [\gamma_5 \rho(x, y) \gamma_5 F(y, x) + \gamma_5 F(x, y) \gamma_5 \rho(y, x)]. \quad (2.110)$$

Dans cette approximation, la *self-energy* non-locale du boson n'est constituée que de propagateurs fermioniques ce qui revient à dire qu'au *Leading Order* de notre développement, il n'y a aucune rétro-action directe de la matière fermionique sur les bosons, et inversement. La seule action de l'une sur l'autre, à cet ordre, se fait à travers le champs macroscopique qui lui reçoit une correction des bosons dans sa masse et une des fermions.

¹¹Nous avons volontairement omis les "-" sur la contribution non-locale des *self-energies*. La confusion n'est plus possible car seule cette contribution peut se décomposer en fonction spectrale et statistique.

2.6.2 Secteur fermionique

L'équation matricielle¹² régissant l'évolution du propagateur fermionique se décompose également en une fonction (matricielle) statistique et une spectrale. L'évolution de ces fonctions est donnée par

$$[i\partial_x - m_\psi(\phi)] F(x, y) = \int_0^{x^0} dz A(x, z) F(z, y) - \int_0^{y^0} dz C(x, z) \rho(z, y) \quad (2.111)$$

$$[i\partial_x - m_\psi(\phi)] \rho(x, y) = \int_{y^0}^{x^0} dz A(x, z) \rho(z, y) \quad (2.112)$$

avec pour expressions de la masse de champs-moyen celle définie par (2.3). une fois de plus on voit que la masse du fermion contient une dépendance temporelle périodique ce qui créera massivement des fermions, dans la limite de ce qui est autorisé par la mécanique quantique. Contrairement au cas du *reheating* purement scalaire, ici on ne peut créer des fermions indéfiniment dû au principe de Pauli. Cependant on s'attend que les collisions vont faire en sorte que la sphère de Fermi, où peuvent être produit les fermions par instabilité tachyonique, se vide pour laisser la place à d'autres fermions. Le rayon de la sphère de Fermi dans laquelle est autorisée la création de fermions, est donné, dans l'espace de Fourier, par la relation [27]

$$k_f = q^{1/4} M_{MF}(\phi_0) \quad (2.113)$$

où

$$q = \frac{m_\psi^2(\phi_0)}{M_{MF}^2(\phi_0)} \quad (2.114)$$

ce qui représente le "poids" relatif des fermions sur les bosons.

La *self-energy* $\Pi(x, y)$ du fermion se décompose comme dans la relation (2.49) où là encore il s'agit d'une équation matricielle dans l'espace de Dirac. Les composantes spectrale et statistique s'écrivent dans notre approximation

$$C(x, y) = \frac{g^2 N_B}{2 N^2} \left[G_F^\perp(x, y) \gamma_5 F(x, y) \gamma_5 - \frac{1}{4} G_\rho^\perp(x, y) \gamma_5 \rho(x, y) \gamma_5 \right] \quad (2.115)$$

$$A(x, y) = \frac{g^2 N_B}{2 N^2} \left[G_F^\perp(x, y) \gamma_5 \rho(x, y) \gamma_5 + G_\rho^\perp(x, y) \gamma_5 F_{\alpha\beta}(x, y) \gamma_5 \right]. \quad (2.116)$$

Contrairement aux bosons, la *self-energy* du fermion est composée des propagateurs fermioniques et bosoniques cependant sa structure matricielle dans l'espace de Dirac est extrêmement simple : c'est juste une combinaison linéaire du propagateur statistique et propagateur spectral du fermions.

2.6.3 Espace de Fourier

Une fois de plus nous n'implémentons pas directement ces fonctions mais leur transformée de Fourier. Il en vient donc que les équations du mouvement dans les différents secteurs s'écrivent uniquement avec des opérateurs de dérivation temporelle et non plus spatiaux.

¹²Dans l'espace de Dirac.

Secteur bosonique

Les équations du mouvement dans l'espace de Fourier s'écrivent :

$$[\partial_t^2 + M_{MF}^2(t)] \phi(t) = g' \int_k \text{tr}_D [D_F(t, t; k)] \quad (2.117)$$

$$[\partial_t^2 + k^2 + M_{MF}^2(t)] G_\rho^\perp(t, t'; k) = - \int_{t'}^t dt'' \Sigma_\rho^\perp(t, t''; k) G_\rho^\perp(t'', t', k) \quad (2.118)$$

$$\begin{aligned} [\partial_t^2 + k^2 + M_{MF}^2(t)] G_F^\perp(t, t'; k) &= \int_0^{t'} dt'' \Sigma_F^\perp(t, t''; k) G_\rho^\perp(t'', t', k) + \\ &- \int_0^t dt'' \Sigma_\rho^\perp(t, t''; k) G_F^\perp(t'', t', k) \end{aligned} \quad (2.119)$$

avec pour expression des masses carrés de champs-moyen :

$$M_{MF}^2(t) = M^2 + \frac{\lambda}{6N_B} \phi^2(t) + \frac{\lambda}{6} \int_k G_F^\perp(t, t; k). \quad (2.120)$$

La résonnance paramétrique a lieu pour les modes compris $\frac{1}{4} \leq \frac{k^2}{M_0^2} \leq \frac{1}{\sqrt{12}}$ pour une masse renormalisée de l'inflaton respectant la condition $M_R^2 \ll \frac{\lambda \phi_0^2}{6N_B}$. Ici $M_0^2 = M_R^2 + \frac{\lambda_R \phi_0^2}{6N_B}$ représente la masse de champ-moyen sans la rétro-action des bosons sur le champ.

Les *self-energies* dans l'espace de Fourier s'expriment comme un produit de convolution

$$\begin{aligned} \Sigma_F^\perp(t, t'; k) &= -\frac{g^2}{2N} \int_q \text{tr}_D \left[\gamma_5 F(t, t'; q) \gamma_5 F(t', t; \|\vec{k} - \vec{q}\|) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \gamma_5 \rho(t, t'; q) \gamma_5 \rho(t', t; \|\vec{k} - \vec{q}\|) \right] \end{aligned} \quad (2.121)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_\rho^\perp(t, t'; k) &= -\frac{g^2}{2N} \int_q \text{tr}_D \left[\gamma_5 \rho(t, t'; q) \gamma_5 F(t', t; \|\vec{k} - \vec{q}\|) + \right. \\ &\quad \left. - \gamma_5 F(t, t'; q) \gamma_5 \rho(t', t; \|\vec{k} - \vec{q}\|) \right]. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Secteur fermionique

En utilisant la décomposition spectrale nous trouvons les équations suivantes pour le secteur fermionique

$$\begin{aligned} [i\gamma_{\alpha\gamma}^0 \partial_t + \vec{\gamma}_{\alpha\gamma} \cdot \vec{k} - m_\psi(\phi) \delta_{\alpha,\beta}] F_{\gamma\beta}(t, t'; k) &= \int_0^t dt'' A_{\alpha\gamma}(t, t''; k) F_{\gamma\beta}(t'', t'; k) \\ &- \int_0^{t'} dt'' C_{\alpha\gamma}(t, t''; k) \rho_{\gamma\beta}(t'', t', k) \end{aligned} \quad (2.123)$$

$$[i\gamma_{\alpha\gamma}^0 \partial_t + \vec{\gamma}_{\alpha\gamma} \cdot \vec{k} - m_\psi(\phi) \delta_{\alpha,\beta}] \rho_{\gamma\beta}(t, t'; k) = \int_{t'}^t dt'' A_{\alpha\gamma}(t, t''; k) \rho_{\gamma\beta}(t'', t', k) \quad (2.124)$$

avec pour expressions de la masse de champs-moyen celle définies par (2.3) et pour

expression de la *self-energy* du fermion

$$C_{\alpha\beta}(t, t'; k) = \frac{g^2 N_B}{2 N^2} \int_q \left[G_F^\perp(t, t'; q) \gamma_5 F_{\alpha\beta}(t', t; \|\vec{k} - \vec{q}\|) \gamma_5 + \right. \\ \left. - \frac{1}{4} G_\rho^\perp(t, t'; q) \gamma_5 \rho_{\alpha\beta}(t', t; \|\vec{k} - \vec{q}\|) \gamma_5 \right] \quad (2.125)$$

$$A_{\alpha\beta}(t, t'; k) = \frac{g^2 N_B}{2 N^2} \int_q \left[G_F^\perp(t, t'; q) \gamma_5 \rho_{\alpha\beta}(t', t; \|\vec{k} - \vec{q}\|) \gamma_5 + \right. \\ \left. + G_\rho^\perp(t, t'; q) \gamma_5 F_{\alpha\beta}(t', t; \|\vec{k} - \vec{q}\|) \gamma_5 \right]. \quad (2.126)$$

Les equations composante par composante exploitant les symétries de la section (2.4) sont détaillées en annexe (G). Pour l'exemple voici celle de la composante scalaire de la fonction statistique

$$\partial_t F_S(t, t'; k) = -k F_T(t, t'; k) + m_\psi(\phi) F_0(t, t'; k) + \\ + \int_0^t dt'' [A_S(t, t''; k) F_0(t'', t'; k) + A_0(t, t''; k) F_S(t'', t'; k) + \\ + A_V(t, t''; k) F_T(t'', t'; k) - A_T(t, t''; k) F_V(t'', t'; k)] + \\ - \int_0^{t'} dt'' [C_S(t, t''; k) \rho_0(t'', t'; k) + C_0(t, t''; k) \rho_S(t'', t'; k) + \\ + C_V(t, t''; k) \rho_T(t'', t'; k) - C_T(t, t''; k) \rho_V(t'', t'; k)]. \quad (2.127)$$

Ce système d'équations est auto-consistant déjà à l'approximation *Leading Order*. L'originalité de l'ajout de la *self-energy* est que l'évolution de chaque propagateur dépend de tous les autres propagateurs. Dans la théorie de masse nulle (donc dans la limite $m_\psi(\phi) \rightarrow 0$), au *Leading Order*, ce système se découple en deux sous systèmes indépendants.

Ces équations doivent être renormalisées. Contrairement au *reheating* purement scalaire du chapitre (1), ici la renormalisation est nécessaire sous peine de voir une instabilité dans l'équation du champ. Dans la section suivante nous verrons comment procéder à cette renormalisation de manière à trouver le meilleur compromis entre solubilité numérique et complexité de la renormalisation hors-équilibre.

Ces équations du mouvement n'ont de solution unique que si on spécifie autant de conditions nécessaires qu'il n'y a de fonctions et d'ordre de dérivation. Nous verrons celles-ci dans la section (2.8).

2.7 Renormalisation $2PI$ hors-équilibre

La renormalisation que nous allons aborder dans cette section est juste une redéfinition des couplages nus afin d'obtenir une théorie (et des résultats) indépendante du cut-off ultra-violet Λ . Pour cela nous rajoutons dans l'action classique un contre-terme à chaque couplage et nous nous contentons de calculer les équations du mouvement¹³ issues de l'action effective à une boucle de cette nouvelle théorie. Les contre-terme sont ajustés de

¹³Nous ne nous préoccuperons pas de la composante longitudinale du propagateur bosonique.

façon à absorber les divergences UV apparaissant dans les termes à une boucle. Il existe d'autres méthodes pour renormaliser la théorie telles [75] par exemple.

$$\Gamma^{1-loop}[\phi, G^\perp, D] = S[\phi] + \frac{i}{2} \text{TrLn} G_{\text{cl}}^{\perp, -1} - i \text{TrLn} D_{\text{cl}}^{-1} \quad (2.128)$$

où tous les contre-termes se trouvent dans $S[\phi]$ et où $G_{\text{cl}}^{\perp, -1}$ et D_{cl}^{-1} prennent la forme

$$iG_{\text{cl}}^{\perp, -1} = - \left(\square_x + M_R^2 + \frac{\lambda_R}{6N_B} \phi^2 \right) \delta(x - y) \quad (2.129)$$

et

$$iD_{\text{cl}}^{-1} = \left(i\partial_x - m_R - \frac{g'_R}{N} \phi \right) \delta(x - y). \quad (2.130)$$

L'action classique s'écrit alors

$$S[\phi] = \int d^4x \left\{ \frac{1 + \delta Z}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \delta \beta \phi - \frac{M_R^2 + \delta M^2}{2} \phi^2 - \frac{\delta \gamma}{3!} \phi^3 - \frac{\lambda_R + \delta \lambda}{4! N_B} \phi^4 \right\} \quad (2.131)$$

Pour calculer l'expression des contre-termes, on dérive de cette action l'équation du mouvement pour le champ ϕ à l'approximation à une boucle en remplaçant les propagateurs par leur expression adiabatique¹⁴ dans le vide et on ajuste les contre-termes de façon à absorber les divergences UV générées par les intégrales en moments.

Ceci est justifié par le fait que ce qui nous interesse c'est son comportement à haute énergie, pour des modes supérieurs à une certaine échelle matérialisée par $M_\pi(\mu)$ ¹⁵ pour le boson ou $m_\psi(\mu)$ pour le fermion. Pour un cut-off suffisamment grand, les modes UV ne sont pas excités et restent dans le vide. L'équation du champ macroscopique devient

$$\left[(1 + \delta Z) \partial_t^2 + M_R^2 + \delta M^2 + \frac{\delta \gamma}{2} \phi + \frac{\lambda_R + \delta \lambda}{6N_B} \phi^2 + \frac{\lambda_R}{6} \int_{M_\pi(\mu)}^\Lambda \frac{k^2 dk}{2\pi^2} G_F^{\perp, ad}(t, t; k) \right] \phi(t) = -\delta \beta + 4g'_R \int_{m_\psi(\mu)}^\Lambda \frac{k^2 dk}{2\pi^2} F_S^{ad}(t, t; k). \quad (2.132)$$

avec pour expression adiabatique des propagateurs¹⁶

$$G_F^{\perp, ad}(t, t; k) = \frac{1}{2\sqrt{k^2 + M_\pi^2(\phi)}} \quad (2.133)$$

$$F_S^{ad}(t, t; k) = \frac{m_\psi(\phi)}{2\sqrt{k^2 + m_\psi^2(\phi)}} - \frac{\ddot{m}_\psi(\phi)}{8[k^2 + m_\psi^2(\phi)]^{\frac{3}{2}}} \quad (2.134)$$

où le point signifie la dérivée par rapport au temps t . Après calculs on trouve les expressions suivantes pour les contre-termes

¹⁴Pour le boson l'approximation adiabatique d'ordre zéro suffit alors que pour le fermion il faut pousser le développement adiabatique au deuxième ordre en dérivée temporelle pour obtenir l'expression du δZ .

¹⁵Les masses dépendantes du temps sont à prendre avec couplages renormalisés *i.e.* $M_\pi^2(\phi) = M_R^2 + \frac{\lambda_R}{6N_B} \phi^2$ et $m_\psi(\phi) = m_R + \frac{g'_R}{N} \phi$.

¹⁶En annexe on retrouve la démonstration du développement adiabatique au premier ordre non trivial dans les dérivées temporelles pour le fermion.

$$\delta\beta = = \frac{g'_R m_R}{2\pi^2} \left[\Lambda^2 - m_R^2 \ln \left(\frac{\Lambda}{m_R(\mu)} \right) \right] \quad (2.135)$$

$$\begin{aligned} \delta M^2 = & \left(-\frac{\lambda_R}{4!} + \frac{g_R'^2}{N} \right) \frac{\Lambda^2}{2\pi^2} + \frac{\lambda_R M_R^2}{48\pi^2} \ln \left(\frac{\Lambda}{M_\pi(\mu)} \right) + \\ & - \frac{3g_R'^2 m_R^2}{2\pi^2 N} \ln \left(\frac{\Lambda}{m_\psi(\mu)} \right) \end{aligned} \quad (2.136)$$

$$\delta\gamma = -\frac{3g_R'^3 m_R}{\pi^2 N^2} \ln \left(\frac{\Lambda}{m_\psi(\mu)} \right) \quad (2.137)$$

$$\delta\lambda = \frac{\lambda_R^2}{96\pi^2} \ln \left(\frac{\Lambda}{M_\pi(\mu)} \right) - \frac{3g_R'^4 N_B}{\pi^2 N^3} \ln \left(\frac{\Lambda}{m_\psi(\mu)} \right) \quad (2.138)$$

$$\delta Z = -\frac{g_R'^2}{4\pi^2 N} \ln \left(\frac{\Lambda}{m_\psi(\mu)} \right). \quad (2.139)$$

Nous avons ici juste soustrait les divergences dans l'équation du champs. Nous remarquons que les contre-termes sont indépendant du temps et des conditions initiales. Ceci signifie qu'il suffit de les calculer au temps initial dans le vide et de les utiliser dans toute la dynamique du problème.

De plus, numériquement, nous nous contenterons de soustraire uniquement les contribution quadratiques étant donné que les logarithmiques n'apportent pas une grande rectification à l'évolution du système pour les valeurs des paramètres $\Lambda/M_0, g_R, g'_R, \lambda_R$ utilisées.

Nous pouvons vérifier l'expression de nos contre-termes en les calculant par une autre méthode. Celle ci est développées en annexe (H).

Finalement, il ne faut pas oublier de choisir les conditions initiales en accord avec la condition de renormalisation tel que les contretermes soient indépendants du temps. Sans ce processus, on risque d'exciter initialement les modes UV alors que la dynamique a été travaillée pour les rendre adiabatiques. Pour cela je consacre plusieurs annexes qui dérivent les expressions adiabatiques du second ordre pour les propagateurs fermioniques. Ces expressions sont reprises dans les conditions initiales de la section (2.8) afin d'obtenir des conditions initiales notamment pour le champ macroscopique.

Renormalisation *Next-to-Leading Order*

Dans notre cas nous avons juste renormalisé la théorie 1-loop car la renormalisation NLO ne fait intervenir que des corrections logarithmiques que nous ne codons pas déjà à 1-loop. Pour traiter une renormalisation complète on peut s'inspirer des travaux [76, 77, 78, 79, 80, 81] qui étudie la renormalisation des approximations *self-consistent*. Ceux de [82, 83, 84, 85, 86] regardent plus précisément la renormalisation de l'action effective *2PI*. On note que ces travaux ont été fait pour des champs scalaires. La renormalisation pour des champs fermioniques a été étudiée dans les références [87, 88] et pour un champ de jauge [89].

2.8 Conditions initiales

2.8.1 Secteur bosonique

Nous avons jusqu'à présent établi les équations du mouvement régissant la dynamique de ce que nous voulons modéliser. Cependant ces équations du mouvement n'ont pas de

solution unique tant que nous avons pas défini nos conditions initiales faisant le lien entre la physique de l'inflation et celle du *reheating*.

La problématique générale du reheating est de comprendre comment toute l'énergie comprise dans le champs macroscopique de l'inflation peut se transformer en particules de matière. Ceci nous impose donc les conditions initiales pour le champ macroscopique et la matière. L'inflaton, pendant la phase d'inflation, a parcouru son potentiel selon le modèle du *slow-roll* et arrive à proximité du minimum où il y oscille. Dans notre repère temporel, à $t = 0$, il se retrouve donc avec une valeur non nulle. Toute l'énergie est contenue dans le champ macroscopique et l'Univers est dans le vide de particules de matière.

Nous allons voir comment traduire cette image de la composition de l'Univers à $t = 0$ en terme de nos fonctions dont on en connaît désormais la dynamique. Les équations du mouvement des fermions ne sont que du premier ordre ce qui implique que la condition initiale des fonctions concernées est suffisante tandis que les équations pour les bosons sont du second ordre impliquant qu'une condition sur la dérivée première est nécessaire. Pour simplifier les problèmes de renormalisation, nous prendrons que la dérivé du champ macroscopique est initialement nulle tout comme pour la dérivée par rapport au temps t du propagateur bosonique transverse. La première hypothèse n'est pas complètement arbitraire mais reste cohérente avec l'image *slow-roll* de l'inflation. La deuxième est un peu plus arbitraire dans la mesure où avec ce choix on fixe la corrélation entre le champ et son moment conjugué au temps initial. Dans le chapitre 3 on peut voir qu'en effet cela revient à une rotation de Bogolyubov de nos champs.

Transcrit en terme de nos fonctions, nous avons

$$\phi(t = 0) = \phi_0 \neq 0 \quad (2.140)$$

$$G_F(t = 0, t' = 0; k) = \frac{1}{2\sqrt{k^2 + M_\pi^2(\phi_0)}} \quad (2.141)$$

comme dans le cas du *reheating* purement scalaire. A cela il faut ajouter les conditions initiales sur les dérivées temporelles

$$\dot{\phi}(t = 0) = 0 \quad (2.142)$$

$$\partial_t G_F(t, t'; k)|_{t'=t=0} = 0 \quad (2.143)$$

$$\partial_t \partial_{t'} G_F(t, t'; k)|_{t'=t=0} = \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + M_\pi^2(\phi_0)}. \quad (2.144)$$

La condition (2.142) correspond à notre image de la condition *slow-roll* des modèles inflationnaire en cosmologie alors que la condition (2.143) correspond au choix de base que nous faisons pour exprimer la cohérence quantique de l'état initial. La condition (2.144) quand à elle sort du calcul sur la définition du nombre de quasi-particules¹⁷ établie à la section (1.6) du chapitre 1.

Les relations de commutation à temps égaux habituelles en mécanique quantique fixent les conditions initiales pour les fonctions spectrales à savoir

$$G_\rho(t, t'; k)|_{t'=t=0} = 0 \quad (2.145)$$

$$\partial_t G_\rho(t, t'; k)|_{t'=t=0} = 1 \quad (2.146)$$

$$\partial_t \partial_{t'} G_\rho(t, t'; k)|_{t'=t=0} = 0. \quad (2.147)$$

Il reste désormais à initialiser les propagateurs fermioniques.

¹⁷Nous reprendrons cette définition pour cette étude.

2.8.2 Secteur fermionique

Pour initialiser nos propagateurs fermioniques, nous nous plaçons dans le vide de particules, antiparticules et paires, ce qui correspond aux conditions initiales du calcul développé en annexe D. Dans l'annexe B nous établissons l'expression adiabatique du second ordre des propagateurs fermioniques. Nous allons reprendre ces expressions comme conditions initiales à nos équation du mouvement. Elles sont plus précises que l'initialisation par la théorie libre. Nos propagateurs s'expriment donc par

$$F_S(t, t; k) = \frac{1}{2} \frac{[\Omega_k(t) + m_\psi(\phi)]^2 + \left(\frac{\dot{A}_k(t)}{2A_k(t)}\right)^2 - k^2}{[\Omega_k(t) + m_\psi(\phi)]^2 + \left(\frac{\dot{A}_k(t)}{2A_k(t)}\right)^2 + k^2} \quad (2.148)$$

$$F_V(t, t; k) = -k \frac{[\Omega_k(t) + m_\psi(\phi)]}{[\Omega_k(t) + m_\psi(\phi)]^2 + \left(\frac{\dot{A}_k(t)}{2A_k(t)}\right)^2 + k^2} \quad (2.149)$$

$$F_T(t, t; k) = -k \frac{\frac{\dot{A}_k(t)}{2A_k(t)}}{[\Omega_k(t) + m_\psi(t)]^2 + \left(\frac{\dot{A}_k(t)}{2A_k(t)}\right)^2 + k^2} \quad (2.150)$$

où $A_k(t)$ et $\Omega_k(t)$ sont axplicités en annexe B.

Etant donné la condition initiale pour $\dot{\phi}(t=0)$, $\dot{A}_k(t=0)$ s'annule également et on trouve

$$F_S(0, 0; k) = \frac{m_\psi(\phi_0)}{2\epsilon_k(\phi_0)} - \frac{\ddot{m}_\psi(\phi)|_{t=0}}{8\epsilon_k^3(\phi_0)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon_k^4(\phi_0)}\right) \quad (2.151)$$

$$F_V(0, 0; k) = \frac{k}{2\epsilon_k(\phi_0)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon_k^5(\phi_0)}\right) \quad (2.152)$$

$$F_T(0, 0; k) = 0 \quad (2.153)$$

où $\epsilon_k(\phi_0) = \sqrt{k^2 + m_\psi^2(\phi_0)}$.

L'équation (2.153) n'est vraie que si nous utilisons la condition (2.142). $\ddot{m}_\psi(\phi)|_{t=0}$ fait intervenir $\ddot{\phi}(t)|_{t=0}$ qui doit être calculé à partir de l'équation du mouvement du champ macroscopique (2.132) prise en $t=0$ utilisant les contre-termes (2.135) à (2.139) et où les intégrales de boucle sont calculées avec l'expression adiabatique¹⁸ des propagateurs.

Pour l'initialisation des fonctions spectrales il est évident qu'elles sont toute nulles (par symétrie) sauf $\rho_0(0, 0; k) = 1$ comme nous le voyons sur son expression libre (153) de l'annexe (E).

L'équation pour les fermions étant du premier ordre en temps il n'est pas nécessaire de spécifier plus de conditions initiales.

Définition du nombre de quasi-particules fermioniques

Même si il n'a pas été nécessaire de définir le nombre de particules fermioniques pour l'initialisation de nos propagateurs, il est judicieux de le faire car nous nous en servons dans la section (2.11) pour discuter la production de matière. Pour cela nous partons de la définition du courant de Noether dans le contexte de la mécanique quantique. Si on part de cette condition c'est que si on cherche à définir un nombre de quasi-particules, alors il

¹⁸A l'ordre nécessaire calculée en annexe B et C.

faut que celui-ci donne l'image de particules en faible interaction et donc susceptible d'être conservé. Le courant de Noether est une des quantités conservées bien connues et aisées à manipuler comme il l'a déjà été fait dans le cas d'un modèle fermionique en interaction avec des champs scalaires dans un travail précédent [61]. Ce courant s'écrit comme

$$\langle J^\mu(t; \vec{k}) \rangle = \langle \bar{\psi}_{-\vec{k}}(t) \gamma^\mu \psi_{\vec{k}}(t) \rangle \quad (2.154)$$

ce qui s'écrit en utilisation la définition (2.10) et l'invariance pas rotation

$$\langle J^\mu(t; k) \rangle = \text{tr}_D [\gamma^\mu D^<(t, t; k)] . \quad (2.155)$$

En utilisant la même définition (2.10) on peut exprimer $D^<(t, t; k)$ en fonction du nombre de quasi-particules fermioniques $N_f(t; k)$ et le nombre de charge $Q(t; k)$. Pour cela on se réfère à la décomposition du champ $\psi_{\vec{k}}(t)$

$$\psi_{\alpha, \vec{k}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_{\vec{k}}(t)}} \sum_s \left[u_{\alpha, \vec{k}}^s a_{\alpha, \vec{k}}^s(t) + v_{\alpha, -\vec{k}}^s b_{\alpha, -\vec{k}}^{\dagger s}(t) \right] \quad (2.156)$$

où s est l'indice de spin valant $\pm \frac{1}{2}$, $a_{\alpha, \vec{k}}^s(t)$ l'opérateur annihilation d'un fermion de mode \vec{k} de spins s et d'indice de Dirac α , et $b_{\alpha, -\vec{k}}^{\dagger s}(t)$ l'opérateur création d'un anti-fermion de mode $-\vec{k}$ de spins s et d'indice de Dirac α . Les fonctions $u_{\alpha, \vec{k}}^s$ et $v_{\alpha, -\vec{k}}^s$ sont les composantes du champ dans une décomposition en onde planes. Si on définit par $\langle a_{\alpha, -\vec{k}}^\dagger(t) a_{\alpha, \vec{k}}(t) \rangle = n_f(t; \vec{k})$, $\langle b_{\alpha, \vec{k}}^\dagger(t) b_{\alpha, -\vec{k}}(t) \rangle = \bar{n}_f(t; \vec{k})$ et $\langle a_{\alpha, \vec{k}}(t) b_{\alpha, -\vec{k}}(t) \rangle = q(t; \vec{k}) \equiv 0$, on obtient finalement

$$D^<(t, t; k) = \gamma^0 \frac{1 + Q(t; k)}{2} + \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{k} - m_\psi(\phi)}{\epsilon_{\vec{k}}(t)} \left[\frac{1}{2} - N_f(t; k) \right] \quad (2.157)$$

où je me suis servi des équations de Dirac libres¹⁹ exprimées pour les fonction u et v telles que

$$\begin{aligned} \sum_{r,s} u_{\alpha, \vec{k}}^r \bar{u}_{\beta, \vec{k}}^s \delta_{r,s} &= [\not{k} + m_\psi(\phi)]_{\alpha\beta} \\ \sum_{r,s} v_{\alpha, \vec{k}}^r \bar{v}_{\beta, \vec{k}}^s \delta_{r,s} &= [\not{k} - m_\psi(\phi)]_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.158)$$

avec $Q(t; k) \equiv n_f(t; k) - \bar{n}_f(t; k)$ et $2N_f(t; k) = n_f(t; k) + \bar{n}_f(t; k)$.

En faisant le même travail on trouve que

$$D^>(t, t; k) = \gamma^0 \frac{1 - Q(t; k)}{2} - \frac{\vec{\gamma} \cdot \vec{k} - m_\psi(\phi)}{\epsilon_{\vec{k}}(t)} \left[\frac{1}{2} - N_f(t; k) \right] \quad (2.159)$$

et en utilisant les définitions (2.22), (2.23) et (2.25) on trouve aisément que

$$Q(t; k) = -2iF_0(t, t; k) \equiv 0 \quad (2.160)$$

ce qui est cohérent avec notre choix de conditions initiales où le nombre de charge est nul, et

$$\left[\frac{1}{2} - N_f(t; k) \right]^2 = F_S^2(t, t; k) + F_V^2(t, t; k). \quad (2.161)$$

¹⁹On se permet d'utiliser la masse dépendante du temps dans les équations libres car on se place dans le cadre des quasi-particules : particules quasiment libres mais avec une masse fonction du temps.

Au cours de la démonstration on trouve que $\frac{1}{2} - N_f(t; k) = \frac{\epsilon_k(t)}{k} F_V(t, t; k)$ d'où

$$\text{sign}[F_V(t, t; k)] = \text{sign}\left[\frac{1}{2} - N_f(t; k)\right] \quad (2.162)$$

étant donné que k est le module du vecteur \vec{k} .

Finalement on trouve l'expression du nombre de fermions en fonction de nos propagateurs statistiques comme

$$N_f(t; k) = \frac{1}{2} - \text{sign}[F_V(t, t; k)] \sqrt{F_S^2(t, t; k) + F_V^2(t, t; k)}. \quad (2.163)$$

Contrairement à la définition du nombre de bosons, cette définition du nombre de quasi-particules fermioniques ne demande pas la présence de terme dérivatifs. Nous vérifierons en annexe I que le nombre de fermions ainsi défini respecte la propriété majeure

$$0 \leq N_f(t; k) \leq 1 \quad (2.164)$$

traduisant le blocage de Pauli.

2.9 Densité d'énergie et de pression

Pour établir l'expression de la densité d'énergie et de pression nous avons utilisé au chapitre 1 la variation de l'action effective (écrite pour une métrique quelconque) par rapport à la métrique. Pour faire cela dans le contexte des fermions il faut introduire les connections de spineurs permettant, entre autre, la transformation des matrices de Dirac avec la métrique. Ce travail peut être contourné étant donné nos besoins. Cependant, cette méthode est très utile pour établir la contribution des collisions dans l'expression de l'énergie totale. J'emploie donc un double procédé pour établir l'expression du tenseur énergie-impulsion. Tout d'abord j'omes volontairement la partie libre des fermions dans l'expression de l'action effective. J'établis l'expression correspondante de ce tenseur en tenant compte des collisions, en utilisant la méthode de la variation de l'action effective par rapport à la métrique. Puis je reprends mon action effective dans Minkowsky, en incluant le terme cinétique des fermions et j'utilise la définition habituelle en théorie des champs, qui est

$$T_{\mu\nu} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial^\mu\phi}\partial_\nu\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial^\mu\sigma}\partial_\nu\sigma + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial^\mu\pi^a}\partial_\nu\pi^a + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial^\mu\psi_i}\partial_\nu\psi_i + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial^\mu\bar{\psi}_i}\partial_\nu\bar{\psi}_i - g_{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (2.165)$$

Enfin, je me limite à l'approximation de champ moyen où tout peut être décomposé en fonctions à deux points selon l'exemple $\langle\sigma^2\bar{\psi}\psi\rangle_{MF} = \langle\sigma^2\rangle\langle\bar{\psi}\psi\rangle = G^{\parallel}\text{tr}_D D$. J'obtiens enfin la contribution du terme cinétique fermionique à un facteur près, qui nous est donné par la comparaison des termes bosoniques.

2.9.1 Densité d'énergie

Ce qui nous intéresse c'est l'énergie par composante du champ ²⁰ que nous séparons en deux parties : l'énergie de champs moyen et l'énergie de collision. Començons par établir l'expression de l'énergie de champ moyen par la méthode habituelle de la théorie des

²⁰Nous prendrons les mêmes notations que dans le chapitre 1. Par composante du champ, j'entend que tout est divisé par le produit NN_B .

champs. On définit l'énergie de champ moyen par

$$E_{MF}^{(1)}(t) = \langle T_{\mu\nu} \rangle_{MF} |_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}, \mu=\nu=0} = NN_B \mathcal{E}_{MF}^{(1)}(t), \quad (2.166)$$

ce qui, utilisant la définition (2.165) pour le tenseur énergie-impulsion donne

$$\begin{aligned} E_{MF}^{(1)}(t) = & \frac{1+\delta Z}{2} \dot{\phi}^2 + \delta\beta\phi + \frac{M_R^2 + \delta M^2}{2} \phi^2 + \frac{\delta\gamma}{3!} \phi^3 + \frac{\lambda_R + \delta\lambda}{4!N_B} \phi^4 \\ & + \frac{N_B}{2} \int_k \left[\partial_t \partial_{t'} + k^2 + M_R^2 + \frac{\lambda_R}{6N_B} \phi^2 + \frac{\lambda_R}{12} \int_q G_F^\perp(t, t; q) \right] G_F^\perp(t, t'; k) \Big|_{t'=t} \\ & + 4N \int_k [kF_V(t, t; k) + m(\phi)F_S(t, t; k)]. \end{aligned} \quad (2.167)$$

Maintenant on reprend la méthode de la variation de la métrique de l'action effective pour estimer, comme au chapitre 1, l'expression de l'énergie tout en omettant la partie libre des fermions. On sépare la contribution champs-moyen de la contribution collisions en incluant dans la première juste les termes à une boucle ou moins dans l'action effective et tous les autres termes dans la deuxième. Il en résulte

$$\begin{aligned} E_{MF}^{(2)}(t) = & \frac{1+\delta Z}{2} \dot{\phi}^2 + \delta\beta\phi + \frac{M_R^2 + \delta M^2}{2} \phi^2 + \frac{\delta\gamma}{3!} \phi^3 + \frac{\lambda_R + \delta\lambda}{4!N_B} \phi^4 \\ & + \frac{N_B}{2} \int_k \left[\partial_t \partial_{t'} + k^2 + M_R^2 + \frac{\lambda_R}{6N_B} \phi^2 + \frac{\lambda_R}{12} \int_q G_F^\perp(t, t; q) \right] G_F^\perp(t, t'; k) \Big|_{t'=t} \end{aligned} \quad (2.168)$$

$$\mathcal{E}_{coll}(t) = -N_B \int_k [\partial_t^2 + k^2 + M_{MF}^2(t)] G_F^\perp(t, t'; k) \Big|_{t'=t} \quad (2.169)$$

où $M_{MF}^2(t)$ est l'expression définie en (2.120) en substituant M et λ respectivement par M_R et λ_R .

On pourra vérifier la conservation de l'énergie sur des simulations *Leading Order* dans la section (2.11). Finalement, dans ces simulations, on soustrait l'énergie du vide. Si on définit l'énergie des quasi-particules par

$$\mathcal{E}(t) = \int \frac{k^2 dk}{2\pi^2 N} \left[\sqrt{k^2 + M_{MF}^2(t)} \left(N_b(t, k) + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{N_B} \sqrt{k^2 + m_\psi^2(\phi)} \left(N_f(t, k) - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (2.170)$$

où $N_b(t, k) + \frac{1}{2} = \sqrt{F(t, t; k)} \partial_t \partial_{t'} F(t, t'; k) \Big|_{t'=t}$, alors on définit l'énergie du vide par

$$\mathcal{E}_{vac}(t) = \frac{1}{2} \int \frac{k^2 dk}{2\pi^2 N} \left(\frac{1}{N} \sqrt{k^2 + M_{MF}^2(t)} - \frac{1}{N_B} \sqrt{k^2 + m_\psi^2(\phi)} \right). \quad (2.171)$$

On obtient au final une expression de l'énergie suivante

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_{MF}^{(1)}(t) + \mathcal{E}_{coll}(t) - \mathcal{E}_{vac}(t). \quad (2.172)$$

Nous séparerons l'énergie du champ classique, l'énergie des fluctuations bosoniques transverses, l'énergie des fermions et enfin l'énergie de collision de la façon suivante

$$\mathcal{E}_{cl}(t) = \frac{1+\delta Z}{2NN_B} \dot{\phi}^2 + \frac{\delta\beta\phi}{NN_B} + \frac{M_R^2 + \delta M^2}{2NN_B} \phi^2 + \frac{\delta\gamma}{3!NN_B} \phi^3 + \frac{\lambda_R + \delta\lambda}{4!NN_B^2} \phi^4 \quad (2.173)$$

$$\mathcal{E}_G(t) = \frac{1}{2N} \int_k \left[\partial_t \partial_{t'} + k^2 + M_R^2 + \frac{\lambda_R}{6N_B} \phi^2 + \frac{\lambda_R}{12} \int_q G_F^\perp(t, t; q) \right] G_F^\perp(t, t'; k) \Big|_{t'=t} \quad (2.174)$$

$$\mathcal{E}_D(t) = \frac{4}{N_B} \int_k [kF_V(t, t; k) + m_\psi(\phi)F_S(t, t; k)] \quad (2.175)$$

$$\mathcal{E}_{coll}(t) = -\frac{1}{N} \int_k [\partial_t^2 + k^2 + M_{MF}^2(t)] G_F^\perp(t, t'; k) \Big|_{t'=t}. \quad (2.176)$$

Une fois de plus je rappelle que cette discrimination des contribution d'énergie n'est pas unique dans le sens ou la seule définition non ambiguë de l'énergie en théorie des champs reste l'énergie totale.

On peut répéter le même travail qu'au chapitre 1 en ce qui concerne la conservation de l'énergie et on trouve que cette expression de l'énergie de champ moyen est conservée.

2.9.2 Densité de pression

Pour la pression nous procédons de la même façon que pour l'énergie et en sommant sur les composantes spatiales du tenseur énergie-impulsion :

$$3P(t) = \langle T_{ii} \rangle = 3NN_B \mathcal{P}(t) \quad (2.177)$$

où la convention d'Einstein s'applique. En répétant le travail fait sur l'énergie on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{MF}(t) = & -\frac{1+\delta Z}{2NN_B} \dot{\phi}^2 - \frac{\delta\beta}{NN_B} \phi - \frac{M_R^2 + \delta M^2}{2NN_B} \phi^2 - \frac{\delta\gamma}{3!NN_B} \phi^3 - \frac{\lambda_R + \delta\lambda}{4!NN_B^2} \phi^4 \\ & + \frac{1}{2N} \int_k \left[\partial_t \partial_{t'} - \frac{k^2}{3} - M_R^2 - \frac{\lambda_R}{6N_B} \phi^2 - \frac{\lambda_R}{12} \int_q G_F^\perp(t, t'; q) \right] G_F^\perp(t, t'; k) \Big|_{t'=t} \\ & + \frac{4}{N_B} \int_k k F_V(t, t'; k) \end{aligned} \quad (2.178)$$

$$\mathcal{P}_{coll}(t) = \frac{1}{NN_B} \int_k [\partial_t^2 + k^2 + M_{MF}^2(t)] G_F^\perp(t, t'; k) \Big|_{t'=t} \quad (2.179)$$

où $M_{MF}^2(t)$ est l'expression définie en (2.120) en substituant M et λ respectivement par M_R et λ_R . La densité de pression totale est donc

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}_{MF}^{(1)}(t) + \mathcal{E}_{coll}(t). \quad (2.180)$$

La pression ne sera pas présentée sur nos simulations cependant une analyse de l'équation d'état serait une donnée intéressante dans notre contexte, d'autant plus dans le cas d'un Univers en expansion.

2.10 Implémentation numérique

Dans cette section je discuterai l'implémentation numérique essentiellement pour les équations du mouvement des fermions et de la discrétisation des contre-termes de renormalisation. La partie bosonique reste essentiellement la même tandis que les équations du mouvement des fermions exigent une discrétisation type *leap-frog*. Cette différence vient de la nature même des équations. Les fermions ont une équation du premier ordre et une discrétisation directe comme pour les bosons mène à une instabilité ; la suite numérique ne convergeant pas.

Du point de vue des intégrales de mémoire (r.h.s des équations du mouvement), on remplace, dans les deux secteurs, la discrétisation type rectangle par des trapèzes. La raison est que dans le cas des bosons, le dernier terme des sommes discrètes est toujours nul (composante type " ρ " prise à temps égaux). Si nous reprenons ce schéma pour les fermions, nous manquons systématiquement le dernier terme. Pour stabiliser les équations discrètes, et afin de prendre en compte tous les termes, on utilise une discrétisation type trapèze qui inclut le premier et le dernier terme de chaque somme.

Je commencerai par le problème des produits de convolution de la *self-energy* du boson qui introduit une intégrale angulaire non soluble avec nos méthodes de convolution par transformé de Fourier sinus. Pour cela il est convenable de transformer ces intégrales en produits de convolution habituels.

2.10.1 Produit de convolution

Pour effectuer les produits de convolution dans les *self-energies*, on utilise une routine de transformée de Fourier sinus qui ramène nos expressions dans l'espace direct, où on fait le produit classique. Ensuite on revient dans l'espace de Fourier via une autre transformé sinus.

La *self-energy* du boson (2.109) et (2.110)²¹ fait intervenir des produits de convolution dans lesquels on a un terme qui dépend du produit scalaire de deux vecteurs. Ces produits peuvent être exprimés à partir uniquement de produit de convolution simples de la façon suivante

$$\int_0^\Lambda \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\vec{q} \cdot \vec{p}}{qp} A(q)B(p) = \frac{1}{2} \int_0^\Lambda \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left[k^2 \frac{A(q)}{q} \frac{B(p)}{p} - qA(q) \frac{B(p)}{p} - \frac{A(q)}{q} pB(p) \right] \quad (2.181)$$

où $\vec{p} = \vec{k} - \vec{q}$ et où $p = \|\vec{p}\|$. On voit que les intégrales ne font intervenir que des produits de convolution que nous pouvons coder avec la méthode des transformées de Fourier sinus.

2.10.2 Discrétisation *Leap-frog* des fermions

Dans le cas des bosons, les équations du mouvement dans le continu ne font intervenir que des dérivés secondes. Avec une discrétisation directe, il suffit de prendre une première dérivé vers l'avant et la deuxième vers l'arrière. Etant donné que l'équation du mouvement des fermions est du premier ordre en temps, on ne peut pas symétriser l'équation aux différences finies correspondantes avec ce type de discrétisation. Une façon pour contourner le problème est de prendre une discrétisation type *Leap-frog* avec des pas en temps doubles.

Reprenons, pour l'exemple, les équations de la théorie libre (141) - (144) développées en annexe E.2). Dans ce schéma de discrétisation²² on obtient

$$\frac{F_S(n+1, m; k) - F_S(n-1, m; k)}{2a_T} = -kF_T(n, m; k) + m_R F_0(n, m; k) \quad (2.182)$$

$$\frac{F_0(n+1, m; k) - F_0(n-1, m; k)}{2a_T} = -kF_V(n, m; k) - m_R F_S(n, m; k) \quad (2.183)$$

$$\frac{F_V(n+1, m; k) - F_V(n-1, m; k)}{2a_T} = kF_0(n, m; k) + m_R F_T(n, m; k) \quad (2.184)$$

$$\frac{F_T(n+1, m; k) - F_T(n-1, m; k)}{2a_T} = kF_S(n, m; k) - m_R F_V(n, m; k) \quad (2.185)$$

où a_T est le pas de discrétisation en temps qui doit être double pour les fermions par rapport à celui des bosons. On peut vérifier que la suite ainsi construite est convergente. En y ajoutant les *self-energies* pour compléter notre théorie libre et obtenir la théorie

²¹Explicitées en annexe (G.3) par les équations (180) et (181).

²²Ici seul le temps est discrétisé, l'impulsion k est à prendre dans le sens continu.

complète, on trouve par exemple pour $F_S^k(n, m) \equiv F_S(n, m; k)$

$$\begin{aligned} \frac{F_S^k(n+1, m) - F_S^k(n-1, m)}{2a_t} &= -kF_T^k(n, m) + m_\psi(\phi)F_0^k(n, m) \\ &+ \sum_{l=0}^n \left[A_S^k(n, l)F_0^k(l, m) + A_0^k(n, l)F_S^k(l, m) + A_V^k(n, l)F_T^k(l, m) - A_T^k(n, l)F_V^k(l, m) \right] \\ &- \sum_{l=0}^m \left[C_S^k(n, l)\rho_0^k(l, m) + C_0^k(n, l)\rho_S^k(l, m) + C_V^k(n, l)\rho_T^k(l, m) - C_T^k(n, l)\rho_V^k(l, m) \right] \end{aligned} \quad (2.186)$$

et $\rho_S^k(n, m) \equiv \rho_S(n, m; k)$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_S^k(n+1, m) - \rho_S^k(n-1, m)}{2a_t} &= -k\rho_T^k(n, m) + m_\psi(\phi)\rho_0^k(n, m) \\ &+ \sum_{l=m}^n \left[A_S^k(n, l)\rho_0^k(l, m) + A_0^k(n, l)\rho_S^k(l, m) + A_V^k(n, l)\rho_T^k(l, m) - A_T^k(n, l)\rho_V^k(l, m) \right] \end{aligned} \quad (2.187)$$

où

$$\sum_{l=i}^j f(l) = 2a_T \left\{ \sum_{l=i+1}^{j-1} f(l) + \frac{1}{2} [f(i) + f(j)] \right\}. \quad (2.188)$$

Les intégrales de mémoire sont également coupées afin d'optimiser la mémoire de l'ordinateur et la rapidité des simulations.

2.10.3 Discrétisation spatiale

L'espace est ici discrétisé comme pour le chapitre 1. Toutes les intégrales spatiales sont remplacées par des sommes discrètes de type "rectangle" aussi bien dans les *self-energies* que dans les calculs des contre-termes. Cependant ces derniers, pour obtenir une meilleure annulation des contributions divergentes, ne sont pas calculés initialement. Ils sont directement calculés dans le terme *tadpole* des masses de champ moyen. Ceci augmente le nombre d'opérations que le processeur doit effectuer à chaque pas en temps mais lui évite des soustractions de grands nombres qui réduisent la précision des calculs.

Notre régularisation consiste à régulariser le module de l'impulsion et effectuer l'intégrale sur l'angle solide analytiquement en exploitant l'isotropie du système. En annexe H on vérifie que la régularisation $4D$ et celle $3D$ sont équivalentes. D'autre part, comme dans le chapitre 1, la discrétisation de l'espace réciproque impose un cut-off infrarouge à la théorie. Cette régularisation, ainsi que la discrétisation, brisent donc l'invariance par translation dans l'espace direct.

Les transformées sinus demandent que la fonction s'annule aux bords ce qui n'est a priori pas notre cas. L'erreur que nous commettons est négligeable étant donné que la troncation se fait dans l'UV (non excité). Une autre façon est de multiplier toutes les fonctions par une fonction régulatrice qui ne coupe pas la fonction brutalement mais qui l'emmène doucement vers zéro. Là encore, on modifie la physique du système dans l'UV mais en lissant l'approche vers zéro, on permet à la transformée sinus d'être exploitée dans de meilleurs

conditions.

L'initialisation des propagateurs se fait à partir de la théorie sans interaction²³ et des conditions déterminées en (2.140)-(2.144) pour les bosons. Nous n'initialisons pas directement les propagateurs aux temps $t = A_T$ et $t' = t = A_T$ via la définition discrète des dérivées mais avec l'expression analytique des propagateurs dans le cas de la théorie libre. On assure ainsi une meilleure stabilité du code. On justifie cet ansatz par le fait qu'aux temps très courts la théorie est essentiellement libre.

2.11 Résultats

Dans cette section je présente des résultats de simulations numériques de l'évolution en temps réel de notre système. Pour cela j'utilise la discrétisation présentée en section (2.10) des équations du mouvement. Je ne présenterai que des simulations à l'approximation *Leading Order* du développement en $1/N$. Celles de l'approximation *Next-to-Leading Order* ne sont pas exploitables pour le moment. Nous nous contenterons donc du premier ordre d'approximation où nous verrons d'hors et déjà de la production de fermions et un transfert d'énergie. Nous pourrions également y tester la renormalisation employée dans ce contexte.

2.11.1 Approximation de champ moyen

Dans cet approximation, il s'agit de conserver tous les termes locaux dans l'action effective (2.4). Les équations du mouvement ne contiennent plus de termes de collisions mais gardent pour autant tous les termes de rétro-action des fermions et des bosons sur le champ et sur eux-mêmes. Comme il a été déjà vu dans les travaux précédents [26, 27], la production de fermions ne peut avoir lieu que pour des impulsions comprises dans la sphère de Fermi. N'ayant pas la possibilité de transférer des fermions d'impulsions²⁴ $k \leq k_f$ vers des modes de plus haute énergie, la production de fermions est rapidement arrêtée. Cependant leur rôle n'en est pas moins important à ce niveau là. Dans les travaux de [62] il a été montré que la présence des fermions catalyse la production des bosons. Nous verrons que dans notre modèle ceci reste vrai en ce qui concerne la production de bosons très infra-rouges. Cependant ces bosons de basse énergie ne permettent pas au champ de se désintégrer. Pour certaines valeurs de nos paramètres, on observe un frein à la désintégration du champ en présence de degré de liberté fermionique.

Les résultats présentés dans cette section ont été réalisés avec des fermions de masse renormalisée nulle et un inflaton également de masse renormalisée nulle²⁵. Dans tous les cas, le couplage λ_R et la valeur initiale du champ ϕ_0 sont combinés tels que $\frac{\lambda_R \phi_0^2}{6N_B} = 1$. La valeur du cut-off ultraviolet a été pris à $\Lambda = 10M_0$ où $M_0 = M_R$ dans le cas où $\bar{M}_R = 1$ et $M_0^2 = \frac{\lambda \phi_0^2}{6N_B}$ dans le cas où $M_R = 0$. Nous verrons que la procédure de renormalisation nous permet une grande insensibilité des résultats vis à vis de la variation du cut-off ultraviolet. Nous avons choisi une grille de 256 modes également répartis dans la plage $[0, \Lambda]$ laissant le cut-off infrarouge $a_S = 0.04M_0$ et un pas en temps de $M_0 a_T = 0.03$. Le nombre de champs

²³Voir annexe E en remplaçant la masse M banuere par son expression "habillée" dépendante du champ initial $M(\phi_0)$.

²⁴Où k_f est le rayon de la sphère de Fermi défini en (2.113).

²⁵Sauf pour la première série de résultats où je montre l'évolution de l'énergie totale du système au cours du temps.

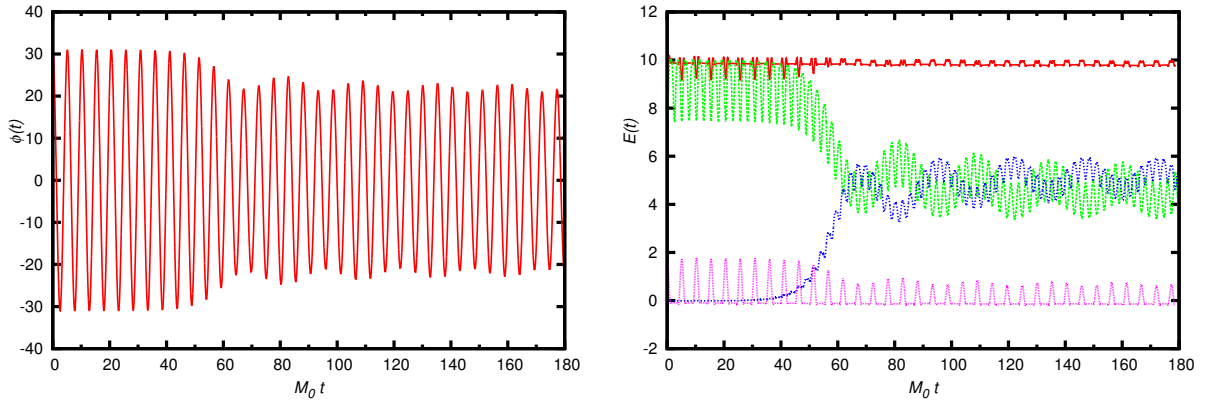


FIG. 2.2 – Evolution temporelle du champ macroscopique (à gauche) et de l'énergie (à droite) totale $\mathcal{E}(t)$ (trait plein - rouge), classique $\mathcal{E}_{cl}(t)$ (tirets longs - vert), des fluctuations transverses de l'inflaton $\mathcal{E}_G(t)$ (tirets courts - bleue) et des fermions $\mathcal{E}_D(t)$ (pointillés - violet). Ici $M_R = 1$, $\lambda_R = 0.1$ et $g_R = \sqrt{3\lambda_R}$. La valeur initiale du champ est fixée par le rapport $\frac{\lambda_R \phi_0^2}{6N_B} = 1$.

fermioniques à été fixé à $N = 4$ pour toutes les simulations effectuées.

Sur la figure (2.2) je présente à gauche l'évolution du champ macroscopique pour un système fortement couplé aux fermions. Pour des temps inférieurs à $M_0 t \lesssim 50$ on observe essentiellement le régime classique où les oscillations périodique du champs permettent une croissance exponentielle du nombre de particules bosonique via le phénomène de résonance paramétrique étudié au chapitre 1 et où la masse tachyonique du fermion produit rapidement des fermions d'énergie $k < k_f$. A partir du temps $M_0 t \sim 50$ on voit que le système quitte son régime linéaire lorsque le terme proportionnel aux fluctuations (bosoniques et fermioniques) devient du même ordre de grandeur que le terme proportionnel au carré du champ. A ce moment on voit le champ qui décroît sensiblement. Le phénomène de résonance paramétrique est brisé et le nombre de particules cesse de croître. Par rapport à la résonance paramétrique pure, la présence des fermions vient limiter la décroissance du champ et forme une enveloppe présentant une légère oscillation dont la période est largement supérieure à la période d'oscillation du champ. Ces oscillations ont été préalablement pointées dans les travaux de [62].

Sur cette même figure, à droite, je présente l'évolution de l'énergie totale et de ces différentes composantes comme elles ont été définies dans la section (2.9). On peut vérifier clairement que l'énergie totale est conservée ce qui constitue le premier test de vérification de notre implémentation numérique. Il est commode de séparer ici la contribution bosonique et la contribution fermionique dans le bilan énergétique pour bien voir que l'essentiel de l'énergie des fluctuations est bosonique. Néanmoins, le rôle des fermions n'est pas à l'image de sa contribution énergétique. On verra comment ils influent fortement dans la dynamique du champs et par ricochet dans la dynamique des bosons. Si les fermions prennent si peu de place dans le bilan énergétique c'est essentiellement dû au principe de Pauli qui bloque le nombre de fermions à au plus 1 dans chaque mode k . De plus on ne crée des fermions que pour des impulsions contenues dans la sphère de Fermi. Comme dans le cas du *reheating* purement bosonique du chapitre 1, on observe sur ce graphe le transfert d'énergie du champ vers les fluctuations. Ce transfert est dû à l'acroissement des fluctuations quantiques qui, dans une interprétation particuliste, traduit l'augmentation

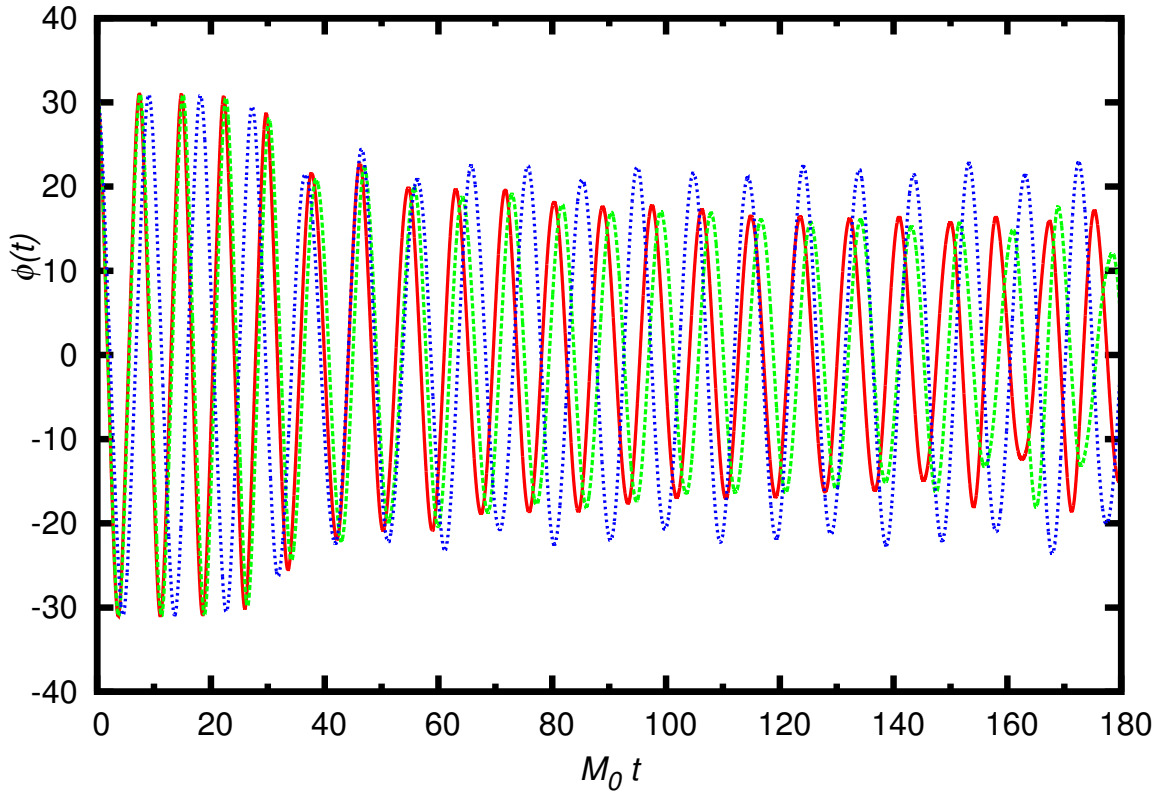


FIG. 2.3 – Evolution temporelle du champ macroscopique pour trois valeurs du couplage au fermions : $g_R = 0$ (trait plein - rouge), $g_R = \sqrt{\lambda_R}$ (tirets longs - vert) et $g_R = \sqrt{3\lambda_R}$ (tirets courts - bleue). Ici $M_R = 0$, $et\lambda_R = 0.1$ et la valeur initiale du champ est fixée par le rapport $\frac{\lambda_R \phi_0^2}{6N_B} = 1$. La présence des fermions dans le système arrête la désintégration du champs plus tôt.

du nombre de particules (bosoniques et fermioniques).

Nous allons par la suite tester la réaction du système sous l'action du couplage g_R du champ au fermions.

Sur la figure (2.3) j'ai superposé l'évolution du champ macroscopique pour trois valeurs du couplage g_R . On note premièrement que la présence des fermions dans le système ne se fait que très peu ressentir pour $g_R^2 \sim \lambda_R$ et ce n'est que pour la simulation à $g_R^2 = 3\lambda_R$ qu'on commence à voir des effets sur le champ. Dès le régime classique, la période d'oscillation du champ est considérablement augmentée dans ce dernier cas. On note sur ce graphe que la présence des fermions empêche le champ de décroître autant que lorsqu'ils sont faiblement couplés.

Sur la figure (2.4 gauche) on trace le nombre de bosons défini par²⁶

$$N_b(t; k) + \frac{1}{2} = \sqrt{F(t, t; k) \partial_t \partial_{t'} F(t, t'; k)|_{t'=t}} \quad (2.189)$$

en fonction de l'impulsion k à la fin de la simulation, pour les trois valeurs de g_R utilisées

²⁶Comme dans le chapitre 1.

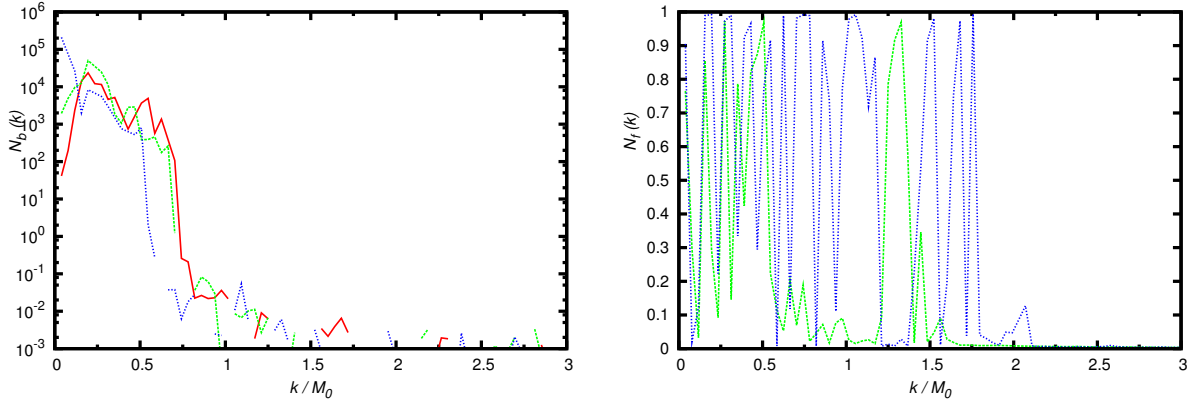


FIG. 2.4 – Spectre final de production de bosons (à gauche) et de fermions (à droite) pour $g_R = 0$ (trait plein - rouge), $g_R = \sqrt{\lambda_R}$ (tirets longs - vert) et $g_R = \sqrt{3\lambda_R}$ (tirets courts - bleu). Ici $M_R = 0$, et $\lambda_R = 0.1$ et la valeur initiale du champ est fixée par le rapport $\frac{\lambda_R \phi_0^2}{6N_B} = 1$. La présence des fermions catalyse la production de bosons de très basse énergie au détriment de ceux de plus haute énergie. On comprend que ces bosons là ne sont pas suffisamment énergétique pour enlever l'énergie du champ expliquant l'amoindrissement de la désintégration de celui-ci. Les fermions (à droite) peuplent entièrement la sphère de Fermi dont le rayon croît comme $\sqrt{g_R}$.

pour les simulations de la figure (2.3). On voit sur cette figure que la présence de fermions catalyse la production de bosons à très basse énergie au détriment de ceux situés à la borne supérieure de la bande de résonance. Ce transfert vers les basses énergies s'explique par le ralentissement de la fréquence d'oscillation du champ macroscopique quand on augmente le couplage g_R . Ceci explique notamment pourquoi le champ décroît moins. Certes il y a plus de bosons produits mais de plus basse énergie ce qui absorbe moins l'énergie du champ, dû à la petitesse de l'espace de phase correspondant. Même si la présence des fermions ne se fait pas directement ressentir dans le bilan énergétique à cause du principe de Pauli, elle modifie notablement le spectre de production bosonique, via l'équation du champ, pouvant influencer de nouveau sur l'évolution de la décroissance du champ macroscopique.

Sur la figure (2.4 droite) on trace le nombre de fermions défini en (2.163). On voit essentiellement que les bosons sont produits dans une région correspondante à la sphère de Fermi dont le rayon k_f est donné en (2.113). L'estimation du rayon de la sphère de Fermi par l'expression (2.113) donne $k_f = 1.56M_0$ pour le cas où $g_R^2 = \lambda_R$ et $k_f = 2.06M_0$ pour le cas où $g_R^2 = 3\lambda_R$ ce qui est en accord avec la lecture graphique. A l'intérieur de cette sphère la structure détaillée du spectre est assez chaotique mais l'enveloppe reste toujours la même. Le nombre de fermions d'impulsion $k \leq k_f$ est toujours à son maximum (l'unité) et au delà il est nul. Plus précisément, dès qu'il approche le rayon de Fermi, le nombre décroît fortement laissant une dernière résonance à $k = k_f$. On voit qu'en augmentant le couplage, le rayon de Fermi augmente, comme

$$\frac{k_f}{M_0} = \left(\frac{6N_B g_R^2}{N^2 \lambda_R} \right)^{1/4}. \quad (2.190)$$

Sur la figure (2.5 gauche) on trace l'évolution temporelle du nombre de particules bosoniques pour le mode de plus basse énergie en fonction des trois couplages g_R étudiés.

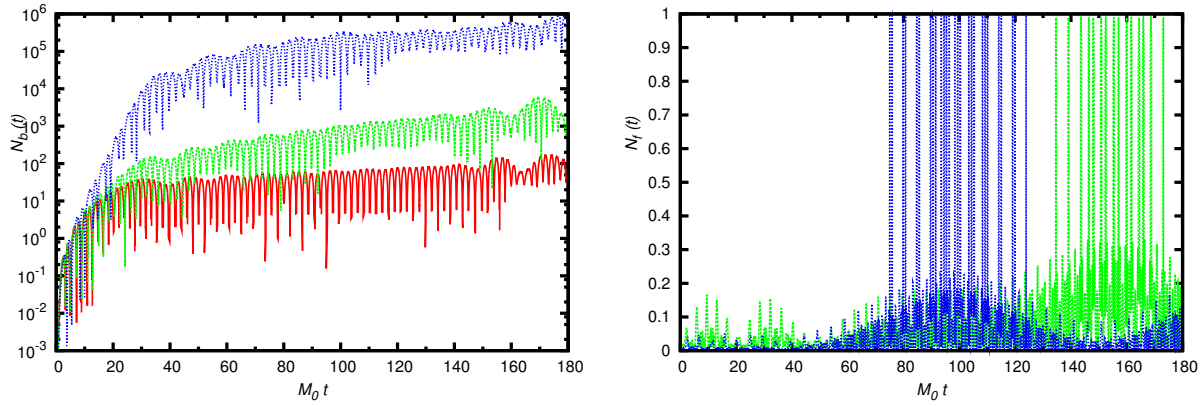


FIG. 2.5 – Evolution temporelle du nombre de particules bosoniques d'impulsion $k = a_S$ (à gauche) et fermionique d'impulsion $k = k_f$ (à droite) pour $g_R = 0$ (trait plein - rouge), $g_R = \sqrt{\lambda_R}$ (tirets longs - vert) et $g_R = \sqrt{3\lambda_R}$ (tirets courts - bleue). Ici $M_R = 0$, et $\lambda_R = 0.1$ et la valeur initiale du champ est fixée par le rapport $\frac{\lambda_R \phi_0^2}{6N_B} = 1$. La croissance exponentielle du nombre de bosons est caractéristique de la résonance paramétrique. L'effet catalyseur des fermions sur la production des bosons de basse énergie ne touche pas sensiblement au taux de croissance mais à la durée du phénomène. La pente à l'origine est sensiblement la même pour les trois valeurs du couplage g_R mais le temps de croissance exponentielle en dépend sensiblement.

Sur cette figure on voit clairement que la croissance des modes dans la bande de résonance est exponentielle et ce pendant toute la durée du régime classique. A la fin de ce dernier, dans le cas où le système n'est pas couplé aux fermions, la croissance du mode s'arrête brutalement et le nombre de bosons se stabilise. On voit également que la pente à l'origine ne dépend pas sensiblement du couplage aux fermions. Si la présence de fermions n'influe pas sur le taux de croissance initial des bosons de basse énergie, elle influe sur la durée de ce traitement. Quand on augmente le couplage g_R , le temps de croissance exponentielle pour ce mode augmente également permettant à ce mode de se développer d'avantage. On observe également qu'une fois le régime classique terminé, alors que sans fermions le nombre de particules cesse de croître, la présence des fermions permet au système de continuer sa croissance à un taux fortement amoindri.

Sur la figure (2.5 droite) on trace l'évolution temporelle du nombre de particules fermioniques pour le mode sur la surface de la sphère de Fermi en fonction des trois couplages g_R étudiés. Il est éviaent que dans le cas $g_R = 0$ la production de fermions est nulle. Pour les deux autres couplages, on voit que la production de ce mode intervient relativement tard dans le déroulement de la simulation. Cependant ce qui est surprenant c'est qu'elle arrive plus tôt lorsque le couplage est plus fort. On peut expliquer cela par le fait qu'à couplage plus fort, la sphère de Fermi a un plus grand rayon et donc on met plus de temps pour peupler les modes de la surface. Il n'est donc pas aussi aisé d'interpréter ces courbes d'évolutions temporelles pour la production de fermions. La nature du degré de liberté est plus complexe que dans le cas des champs scalaires. On peut juste conclure que globalement les fermions de ce mode sont produits et ce d'autant plus lentement que le couplage est fort.

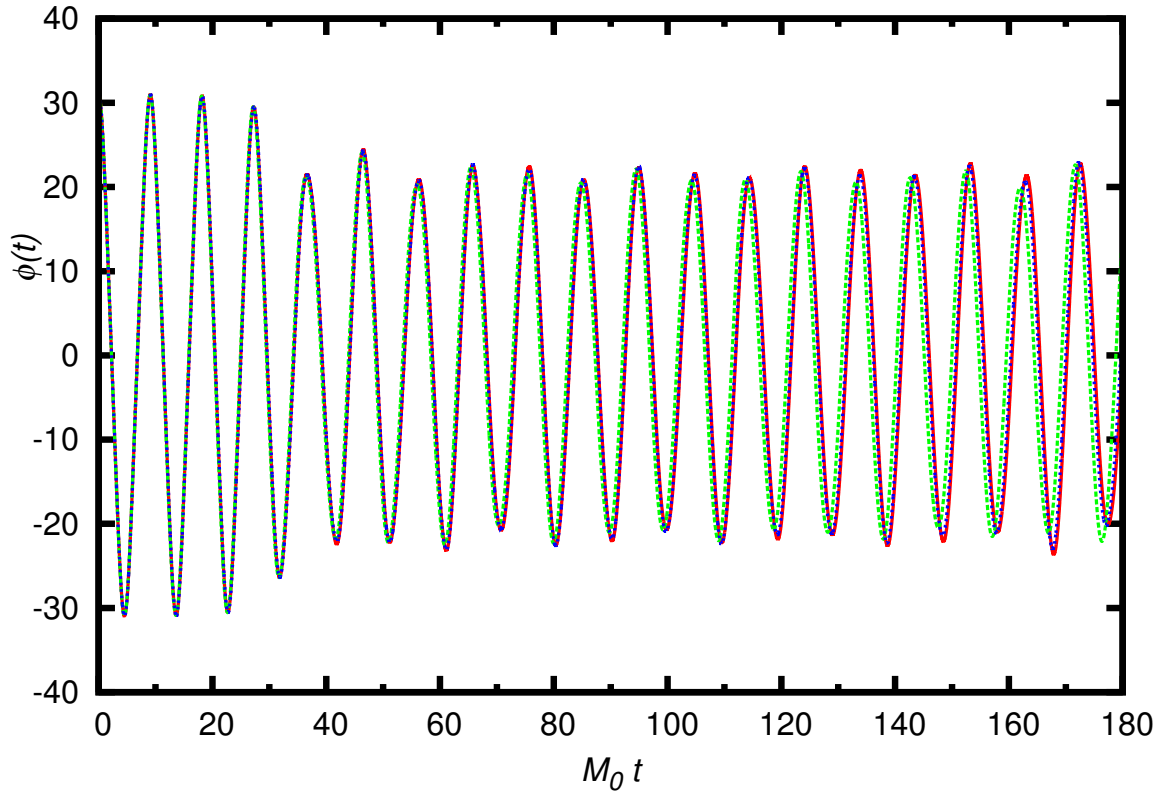


FIG. 2.6 – Evolution temporelle du champ macroscopique pour différentes valeurs du cut-off ultraviolet $\Lambda = 10M_0$ (trait plein - rouge), $\Lambda = 20M_0$ (tirets longs - vert), $\Lambda = 40M_0$ (tirets courts - bleue). Ici $M_R = 0$, $\lambda_R = 0.1$ et $g_R = \sqrt{3\lambda_R}$. La valeur initiale du champ est fixée par le rapport $\frac{\lambda_R \phi_0^2}{6N_B} = 1$. On voit manifestement que le champ est insensible aux cut-off explorés.

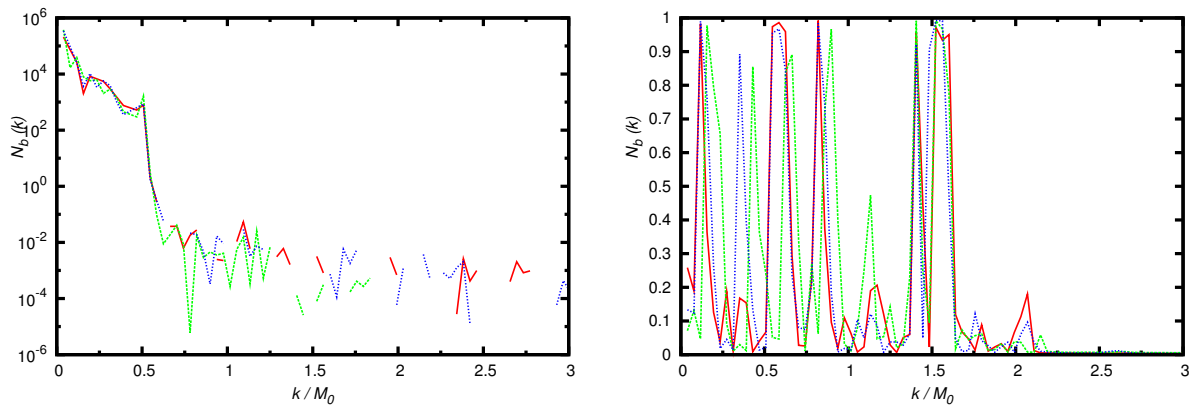


FIG. 2.7 – Spectre finaux de production de bosons (à gauche) et de fermions (à droite) pour les trois valeurs du cut-off ultraviolet $\Lambda = 10M_0$ (trait plein - rouge), $\Lambda = 20M_0$ (tirets longs - vert), $\Lambda = 40M_0$ (tirets courts - bleue). Ici $M_R = 0$, $\lambda_R = 0.1$ et $g_R = \sqrt{3\lambda_R}$. La valeur initiale du champ est fixée par le rapport $\frac{\lambda_R \phi_0^2}{6N_B} = 1$. On voit clairement que la théorie est insensible à la variation du cut-off dans la gamme explorée.

Tests sur la renormalisation

Sur la figure (2.6) on superpose trois évolutions temporelles du champ macroscopique $\phi(t)$ pour trois valeurs de la coupure ultraviolette allant de $\Lambda = 10M_0$ à $\Lambda = 40M_0$. On conclut que cette méthode de renormalisation $2PI$ hors équilibre au *Leading Order* est amplement satisfaisante pour les besoins de l'étude. Les premières différences commencent à se voir aux temps très longs et restent largement acceptables.

On voit sur le spectre bosonique de la figure (2.7 gauche) que la renormalisation nous donne une marge de manoeuvre confortable puisque dans toute la gamme explorée de Λ nous avons une grande insensibilité des résultats avec la variation du cut-off. On présente les résultats centrés autour de la bande de résonance mais il en demeure de même pour toute les modes de plus hautes énergie.

Sur la figure (2.7 droite) je présente le spectre fermionique. Là encore la superposition des courbes nous permet de conclure que notre système est bien cut-off indépendant après la renormalisation décrite dans la section (2.7). La conclusion peut être plus douteuse dans la mesure où les courbes ne se superposent pas aussi bien que dans le cas des bosons, cependant le spectre fermionique est mal compris dans les détails, il faut se concentrer sur son enveloppe. Nous pouvons voir que l'impulsion correspondante au rayon de la sphère de Fermi ne varie pas avec le cut-off et il en est de même pour la dernière bande de résonance.

Pour cette analyse nous nous sommes placés dans le cas où le couplage aux fermions est le plus élevé mais les résultats ne sont que meilleurs pour des couplages inférieurs.

2.11.2 Perspectives

La motivation première de cette étude était d'analyser les effets au-delà de l'approximation de champ-moyen incluant les effets de collisions, de mémoire, et hors-couche de masse en développant l'action effective $2PI$ au *Next-to-Leading Order*. L'idée est que les collisions peuvent modifier le spectre autant des fermions que des bosons afin de produire plus de particules et absorber plus d'énergie au champ classique. La thermalisation ne serait qu'une ultime étape à l'évolution du système hors-équilibre.

Dans cette optique, il a été réalisé le travail analytique en amont pour établir les équations du mouvement à cet ordre d'approximation. Nous avons commencé à établir le code permettant de les résoudre qui se trouve dans un état fortement avancé.

Aujourd'hui il reste donc à poursuivre les tests et apporter les corrections nécessaires au code permettant d'aller plus loin dans la compréhension du *reheating*

Conclusions

Cette étude sur le *reheating* fermionique était initialement motivée pour comprendre en quoi les nouvelles approches apportées récemment dans les travaux²⁷ [61] pouvaient modifier le paysage (restreint) du *reheating* fermionique. Les degrés de liberté fermioniques ont été peu étudiés dans le passé à cause du manque d'une approximation classique. De plus les études [70, 26, 62, 63, 65, 66, 27, 64, 67, 71] se limitent essentiellement à l'approximation de champ-moyen incluant (ou non) la rétro-action des fermions sur la dynamique de l'inflaton. Il a été montré que la participation des degrés de liberté fermioniques dans le transfert énergétique est minime mais qu'ils modifient la production de bosons.

L'originalité de ce travail portait sur deux fronts. Cette étude va au-delà de l'approximation de champ-moyen, incluant les effets de collisions, de mémoire et hors-couche de masse. L'inclusion de ces termes reste dans l'optique de favoriser le processus de désintégration du champ dans le canal fermionique. Ceci n'est concevable que si le taux de production de particules est inférieur au taux de collisions de celles-ci. Le premier est connu pour être assez grand dans la phase du *preheating*, notamment avec un couplage trilineaire, alors il faut que le second le soit d'autant plus. Pour cela il faut que le couplage de l'inflaton à la matière (fermionique) soit non-perturbatif.

Le modèle utilisé est une généralisation du modèle σ -linéaire au groupe $SU(N)$, où N représente le nombre de champs fermioniques. La composante longitudinale du champ bosonique $\hat{\phi}$ a une valeur moyenne dans le vide non nulle, ce qui représente l'inflaton classique, et est couplé aux fermions via un vertex de Yukawa. Une fois de plus on utilise la méthode de l'action effective *2-Particule-Irréductible* que l'on tronque à l'ordre sous-dominant d'un développement en $1/N$. Cet ordre est suffisant et nécessaire pour rendre compte des effets souhaités. Au-delà de l'approximation sur l'action effective aucune autre approximation n'est incluse dans notre théorie hormis l'implémentation numérique.

Dans cette thèse on trouve le développement des équations du mouvement renormalisées régissant la dynamique d'un tel système dont les conditions initiales sont typiquement celles de l'Univers à la fin de l'inflation. Ces équations ont été implémentées numériquement telle qu'un simple ordinateur de bureau "double-cœur" suffise. À l'ordre dominant le code produit des résultats fiables mais doit être corrigé pour l'analyse à l'ordre suivant. Les résultats *Leading Order* obtenus reproduisent les phénomènes déjà connus des études présentées en [62, 27] dans le cadre de modèles sensiblement différents. Les fermions n'ont pas un rôle direct majeur dans le transfert d'énergie de l'inflaton aux fluctuations mais catalysent la production de bosons. Dans notre cas, cette catalyse intervient à basse énergie ce qui, dans les conditions d'utilisation étudiées dans la section (2.11), freine le transfert énergétique.

²⁷Les contributions de la référence [53] sont apparues durant l'établissement de ce travail.

Conclusions sur le *reheating*

L'étude sur le *reheating* menée dans cette thèse porte essentiellement sur la nécessité de mieux comprendre le rôle des collisions lors de la production de particules bosoniques et fermioniques. Dans ces deux cas cette étude est nécessaire à une description quantique cohérente de l'Univers depuis la production jusqu'à la thermalisation. Afin de raccorder le modèle standard de la cosmologie à un modèle d'inflation, il est crucial de comprendre cette ère de transition. Sa compréhension limitera fortement le nombre de modèles d'inflation permis par les nombreuses contraintes qu'apportent, en sortie, les scénarios de baryogénèse et leptogénèse qui ont des conséquences observationnelles importantes.

Pour la première fois on considère une interaction trilinéaire couplant l'inflaton à la matière en allant à l'ordre sous dominant d'un développement en $1/N$ de l'action effective. Cet ordre est suffisant pour capter les contributions rendant compte des collisions entre degrés de liberté et des effets de mémoire permettant la thermalisation du système.

Au cours de ce travail il a été développé, autant pour le *reheating* scalaire que fermionique, les équations du mouvement permettant la description du transfert d'énergie de l'inflaton vers la matière. Elles ont été développées en utilisant les techniques d'action effective $2PI$ permettant un développement quantique complet de la théorie pouvant décrire les temps très long. J'ai développé cette action par le paramètre $1/N$ évitant le développement perturbatif habituel. Celui-ci permet l'usage de couplages forts favorisant la thermalisation des degrés de liberté. Ces équations n'étant pas solubles simplement par des méthodes analytiques, j'ai développé également une implémentation numérique destinée à sa résolution. La solution numérique à l'ordre dominant nous donne essentiellement les mêmes types de résultats que les travaux des références [62, 27, 42] et pourraient, dans les deux cas, être approfondis pour une meilleure compréhension du phénomène. Les résultats de l'ordre sous-dominant n'ont pas été obtenus dans le cadre de cette thèse étant donné que le code les produisant fait encore défaut à ce niveau là.

Pour l'heure le processus de transfert d'énergie, dans le cadre de ces modèles, reste délicat et nécessite souvent un réglage fin des paramètres du modèle. Il semble que les degrés de liberté bosoniques sont responsables de ce transfert d'énergie. La présence des fermions ne constitue, pour le moment, qu'un rôle de catalyse à la production de bosons. Pour certaines valeurs des couplages, la présence de fermions empêche même la décroissance du champ comme il a été pointé auparavant dans la référence [62].

Le futur de ces projets passe avant tout par la mise en fonctionnement du code au *Next-to-Leading Order*. L'autre composante importante à inclure est l'expansion de l'Univers. Celle-ci est connue pour atténuer les effets de production de particules et de bloquer très rapidement le processus de transfert d'énergie [24].

La composition de l'Univers est bien plus riche que celle abordée lors de ce travail. Des études récentes sur un *reheating* mettant en jeu les particules du modèle standard de la

physique des particules [70, 71] on été réalisées. Toujours dans l'optique de la thermalisation il serait important de refaire ce même travail dans ce type de modèle. Pour cela, il faut étudier la production de bosons de jauge dans ce même cadre. Des travaux concernant l'application des méthodes $2PI$ hors-équilibre pour ce type de degré de liberté ont récemment été développés [89, 90].

Deuxième partie

Décohérence

Chapitre 3

Décohérence d'un état pur

La décohérence quantique d'un état pur est un processus fondamental dans de nombreux domaines comme la théorie de l'information [91], la physique des condensats de Bose-Einstein [92] ou des ordinateurs quantiques [93], mais également en physique des neutrinos [17, 19, 20] et des collisions d'ions lourds [18]. Dans le cadre de la cosmologie, elle intervient notamment dans la physique des trous-noirs [94] et, plus particulièrement pour le sujet de cette thèse, dans la description des fluctuations primordiales [95, 96, 97, 11, 12, 13]. L'étude de tels systèmes hors-équilibre demande une description en temps réel de la dynamique quantique, soluble analytiquement uniquement dans des approximations relativement simples comme l'approximation linéaire, de champ-moyen et au-delà dans certains cas [45]. L'analyse microscopique complète demande des techniques de dynamique quantique hors-équilibre telles que l'action effective $2PI$ que nous avons jusqu'à présent employée dans une étude du *reheating* cosmologique. Celle-ci nous permet d'obtenir la thermalisation d'un système quantique indépendamment du choix des conditions initiales (universalité de la théorie) et ce pour un développement en couplage ou en $1/N$ de l'action effective.

La notion de décohérence est vaste en physique [98]. La plupart des études précédentes se basent sur un système plongé dans un environnement où les degrés de liberté de ce dernier sont intégrés et agissent de manière effective (*coarse-graining*) [99, 100, 101]. L'approche de ce travail est différente dans la mesure où les interactions avec le milieu extérieur sont calculées explicitement. Cette méthode a l'avantage de résoudre exactement la décohérence de l'état initial à partir des premiers principes de la théorie quantique des champs. Notre approche consiste à regarder la (dé)cohérence du système à partir de ses fonctions de corrélation s'inspirant des travaux [102, 103, 12, 104, 13, 54, 105, 106, 55, 107].

La décohérence décrite dans cette étude est à prendre au sens effectif dans la mesure où on se place du point de vue d'un observateur n'ayant accès qu'à la fonction à deux points à temps égaux (et ses dérivées). L'information du système initialement placée en totalité dans celles-ci se disperse dans les fonctions de corrélation à plus de points au cours de son retour à l'équilibre [54, 102, 103].

L'application des méthodes type $2PI$ à la théorie des champs hors-équilibre est un processus qui conserve l'unitarité de l'évolution du système¹. Si celui-ci se trouve dans un état pur à l'instant initial, alors il y restera si l'évolution qu'il subit est unitaire. Dans l'espace des fonctions à n -points, la trajectoire que suit le système obéissant aux équations du mouvement est une trajectoire qui préserve l'unitarité de l'évolution, si n est suffisamment

¹Il est simple de voir que la théorie exacte, sans approximation, est unitaire. Cependant rien nous garantit qu'à un ordre fini d'approximation ceci reste vrai.

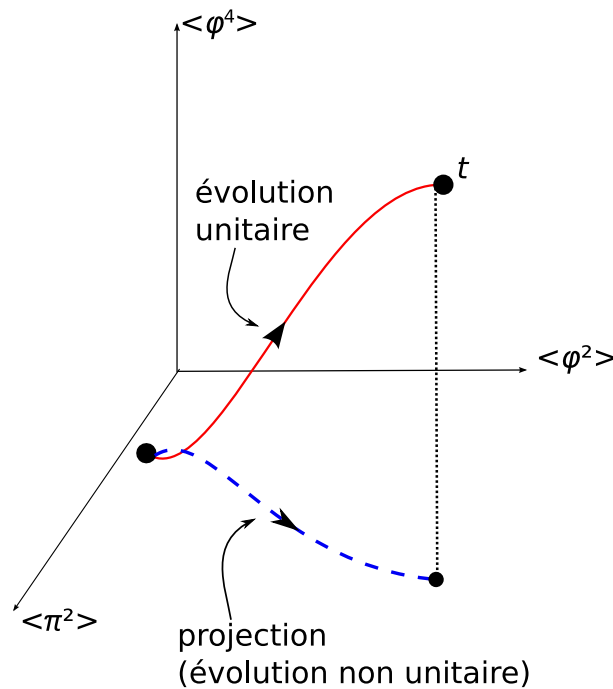


FIG. 3.1 – Dans l'espace des fonctions à n -points (ici représenté juste par F , K et $\langle \varphi^4 \rangle$) la trajectoire que suit le système respecte l'unitarité de l'évolution. L'observateur n'a accès qu'à la projection de cette trajectoire dans son sous-espace des fonctions à deux points. Rien ne garantit l'unitarité de l'évolution du système le long de cette trajectoire-ci.

grand. Cependant, l'observateur n'ayant accès qu'aux fonctions à deux points, il n'observe que la projection de cette trajectoire dans son sous-espace. En, général, l'évolution le long de la trajectoire projetée n'est pas unitaire. Dans les cas que nous allons étudier, la décohérence que nous estimons à partir des fonctions à deux points, n'est qu'une apparence produite par "l'ombre" de trajectoire unitaire (où le système reste cohérent) sur le "sol" des fonctions à deux points (où le système décohère). Si on se plaçait dans un sous-espace contenant les fonctions à plus de points, on observerait un système qui décohère différemment. Cette description de l'évolution du système initialement cohérent est résumée sur le croquis (3.1). Sur ce croquis on ne schématise que les fonctions à 2 et 4 points à temps égaux mais l'information peut être stockée dans les fonctions à temps inégaux² (effets hors couche de masse).

3.1 Le modèle $O(N)$ avec interaction quartique

On cherche à modéliser la décohérence effective d'un système initialement placé dans un état pur. Comme il a été dit en introduction, il s'agit du transfert d'information contenue dans la fonction de corrélation à deux points vers les fonctions à plus de point. Pour cela nous utiliserons une fois de plus une action effective qui inclut des termes de collisions comme dans le chapitre 1. Ces termes de collisions sont cruciaux. Sans eux, les seules corrections apportées aux équations du mouvement issues de l'action classique seraient du type locaux (corrections à la masse). Dans ce cas la dynamique reste gaussienne puisque

²Pour des systèmes invariants par translation dans le temps il n'est pas possible de stocker de l'information dans les corrélations gaussienne entre deux modes différents.

toute l'information reste contenue dans les fonctions à deux points, ne provoquant donc pas la décohérence du système. Ce sont les termes non-locaux de l'action effective qui génèrent les non-gaussianités. Nous voulons aussi étudier le cas le plus simple de N champs scalaires massifs à valeur moyenne nulle en auto-interaction, obéissants à la symétrie $O(N)$.

Comme on s'attend à ce que le retour à l'équilibre dépende du couplage, on aimerait avoir accès à des théories non-perturbatives. Pour cela on ne peut employer le développement à couplage faible et on utilise un développement non-perturbatif en $1/N$.

Nous allons donc prendre l'action classique suivante

$$S[\varphi] = - \int d^4x \left[\frac{1}{2} \varphi_a (\square_x + M^2) \varphi_a + \frac{\lambda}{4!N} (\varphi_a \varphi_a)^2 \right] \quad (3.1)$$

où chaque champ est indexé par $a = 1 \cdots N$ et où l'intégrale temporelle sur le quadri-vecteur x est à prendre sur le contour de Schwinger défini dans le paragraphe (1.3.1) du chapitre 1 par la figure (1.1). Une fois de plus, nous obtenons les fonctions de corrélation de la théorie quantique à partir de l'action effective 2PI [45]

$$\Gamma[G] = \frac{iN}{2} \text{TrLn} G^{-1} + \frac{iN}{2} \text{TrLn} G_{\text{cl}}^{-1} + \Gamma_2[G] \quad (3.2)$$

où

$$iG_{\text{cl}}^{-1}(x, y) = -(\square_x + M^2) \delta^{(4)}(x - y), \quad (3.3)$$

$$G_{ab}(x, y) = \langle \mathcal{T} \varphi_a(x) \varphi_b(y) \rangle = \delta_{ab} G(x, y) \quad (3.4)$$

et où $\Gamma_2[G]$ contient tous les termes à deux boucles et plus (selon l'approximation de la théorie).

L'équation du mouvement dérivant de l'action effective s'écrit³ donc comme habituellement

$$(\square_x + M^2) G(x, y) + i \int_z \Sigma(x, z) G(z, y) = -i \delta^{(4)}(x - y) \quad (3.5)$$

où $\Sigma(x, y)$ est la *self-energy* du champ scalaire et se définit comme habituellement par

$$\Sigma(x, y) = \frac{2i}{N} \frac{\delta \Gamma_2[G]}{\delta G(x, y)}. \quad (3.6)$$

Comme nous voulons avoir accès à des couplages λ élevés il est plus judicieux de choisir un développement en $1/N$ à l'ordre $\mathcal{O}(1)$, ordre le plus élémentaire capturant la physique nécessaire à l'étude de la décohérence. Pour cela nous allons reprendre uniquement la "somme de bulles" du Γ_2 du chapitre (1) à savoir

$$\Gamma_2[G] = -\frac{\lambda N}{4!} \int_x G^2(x, x) + \frac{i}{2} \text{Tr}_c \text{Ln} B \quad (3.7)$$

où

$$B(x, y; G) = \delta^{(4)}(x - y) + i \frac{\lambda}{6} G^2(x, y). \quad (3.8)$$

Afin de paramétrer correctement le problème aux valeurs initiales, il est convenable d'effectuer la séparation en fonction spectrale et statistique une fois de plus telle que

$$F(x, y) = \frac{1}{2} \langle \{ \varphi(x), \varphi^\dagger(y) \} \rangle \quad (3.9)$$

$$\rho(x, y) = i \langle [\varphi(x), \varphi^\dagger(y)] \rangle \quad (3.10)$$

³Pour des conditions initiales gaussiennes.

ayant pour symétrie celles citées en (1.46). L'équation du mouvement du propagateur complet s'écrit donc

$$[\square_x + M_{MF}^2(x)] F(x, y) = \int_0^{y^0} dz \Sigma_F(x, z) \rho(z, y) - \int_0^{x^0} dz \Sigma_\rho(x, z) F(z, y) \quad (3.11)$$

$$[\square_x + M_{MF}^2(x)] \rho(x, y) = - \int_{y^0}^{x^0} dz \Sigma_\rho(x, z) \rho(z, y) \quad (3.12)$$

où

$$M_{MF}^2(x) = M^2 + \frac{\lambda}{6} \frac{N+2}{N} F(x, x) \quad (3.13)$$

$$\Sigma_F(x, y) = \frac{\lambda}{3N} \left[I_F(x, y) F(x, y) - \frac{1}{4} I_\rho(x, y) \rho(x, y) \right] \quad (3.14)$$

$$\Sigma_\rho(x, y) = \frac{\lambda}{3N} [I_\rho(x, y) F(x, y) + I_F(x, y) \rho(x, y)] \quad (3.15)$$

et

$$I_F(x, y) = \Pi_F(x, y) + \int_0^{y^0} dz I_F(x, z) \Pi_\rho(z, y) - \int_0^{x^0} dz I_\rho(x, z) \Pi_F(z, y), \quad (3.16)$$

$$I_\rho(x, y) = \Pi_\rho(x, y) - \int_{y^0}^{x^0} dz I_\rho(x, z) \Pi_\rho(z, y) \quad (3.17)$$

avec

$$\Pi_F(x, y) = -\frac{\lambda}{6} \left[F^2(x, y) - \frac{1}{4} \rho^2(x, y) \right] \quad (3.18)$$

$$\Pi_\rho(x, y) = -\frac{\lambda}{3} F(x, y) \rho(x, y) \quad (3.19)$$

En représentation diagramatique $\Pi(x, y)$ décrit une bulle élémentaire parcourue par le propagateur complet $G(x, y)$ tandis que $I(x, y)$ décrit la resommation des bulles élémentaires.

Nous supposons également un espace invariant par translation et invariant par rotation. Ceci nous permet de prendre la transformé de Fourier spatiale des équations (3.11) et (3.12) et de résoudre les mêmes équations que dans le chapitre 1.

Les équations du mouvement sont sommairement renormalisées tout comme celles du chapitre 1. Cette renormalisation est formellement indispensable mais numériquement elle ne l'est pas dans le sens où les quantités observées dépendent peu du cut-off ultraviolet. Cependant, la température finale du système, elle, en dépend fortement. Dans un premier temps, nous regarderons essentiellement la décohérence d'un état pur qui s'effectue dans des temps bien plus court que ceux de la thermalisation totale du système. Puis, quand il s'agira de regarder des systèmes thermalisants, nous nous intéresserons uniquement au retour à l'équilibre thermodynamique *i.e.* un système avec une distribution thermique type Bose-Einstein et non pas à la température d'équilibre, elle même, au quel cas la dépendance en cut-off sera tenue en compte.

Les équations du mouvement écrites dans l'espace de Fourier sont implémentées numériquement de la même façon que celles du chapitre sur le *reheating* scalaire.

3.2 Mesure de la cohérence/décohérence

Soit un observateur n'ayant accès qu'à la fonction à deux points et ses dérivées à temps égaux. En terme de champs, il ne mesure que les fonctions suivantes

$$F(t, t; k) = \langle \varphi^\dagger(t; \vec{k}) \varphi(t; \vec{k}) \rangle \quad (3.20)$$

$$R(t, t; k) = \frac{1}{2} \langle \varphi^\dagger(t; \vec{k}) \pi(t; \vec{k}) + \pi(t; \vec{k}) \varphi^\dagger(t; \vec{k}) \rangle \quad (3.21)$$

$$K(t, t; k) = \langle \pi^\dagger(t; \vec{k}) \pi(t; \vec{k}) \rangle. \quad (3.22)$$

On remarque qu'avec les définitions (3.9) et (3.10) on obtient

$$R(t, t; k) = [\partial_t F(t, t'; k)]_{t'=t} \quad (3.23)$$

$$K(t, t; k) = [\partial_t \partial_{t'} F(t, t'; k)]_{t'=t}. \quad (3.24)$$

Pour minimiser le biais dans la mesure des observables, on décrit l'état du système au temps t par sa matrice densité réduite qui est la matrice densité habituelle intégrée sur les degré de liberté externes au système. Pour un état invariant par translation, la matrice densité réduite s'écrit comme étant un produit des matrices densité réduites par "mode"

$$D_{\text{red}}(t) = \prod_{\vec{k}} D(t; \vec{k}). \quad (3.25)$$

La matrice densité réduite la plus générale s'écrit, dans la base $\mathcal{B} = (\varphi, \pi)$ pour un état gaussien⁴

$$D(t; \vec{k}) = \mathcal{A} \exp \kappa(t; k) \left\{ F(t, t; k) \pi^\dagger(t; \vec{k}) \pi(t; \vec{k}) + K(t, t; k) \varphi^\dagger(t; \vec{k}) \varphi(t; \vec{k}) - R(t, t; k) [\varphi^\dagger(t; \vec{k}) \pi(t; \vec{k}) + \pi^\dagger(t; \vec{k}) \varphi(t; \vec{k})] \right\} \quad (3.26)$$

où \mathcal{A} est un facteur de normalisation et où

$$\kappa(t; k) = -\frac{\ln \left[1 + \frac{1}{n(t; k)} \right]}{2n(t; k) + 1} \quad (3.27)$$

avec

$$n(t; k) + \frac{1}{2} = \sqrt{F(t, t; k) K(t, t; k) - R^2(t, t; k)} \equiv a(t, k) \quad (3.28)$$

dans une image de quasi-particules. Cette définition du nombre de quasi-particules est indépendante du choix de la base dans laquelle on exprime la matrice densité alors que la définition

$$\bar{n}(t; k) + \frac{1}{2} = \frac{K(t, t; k) + \epsilon_k^2(t) F(t, t; k)}{2\epsilon_k^2(t)} \equiv \bar{a}(t, k), \quad (3.29)$$

où $\epsilon_k(t)$ est une échelle d'énergie, dépend du choix de la base via $\epsilon_k(t)$ qui a pour rôle de fixer notre échelle d'énergie. On définit à partir de là un paramètre de cohérence/décohérence

$$\gamma_k(t) = \sqrt{1 - \frac{a^2(t; k)}{\bar{a}^2(t; k)}} \quad (3.30)$$

qui dépend du choix de base (de l'échelle d'énergie) à travers $\epsilon_k(t)$ dans la définition de $\bar{a}(t; k)$. Ce paramètre contrôle l'ampleur des termes hors-diagonaux de la matrice densité

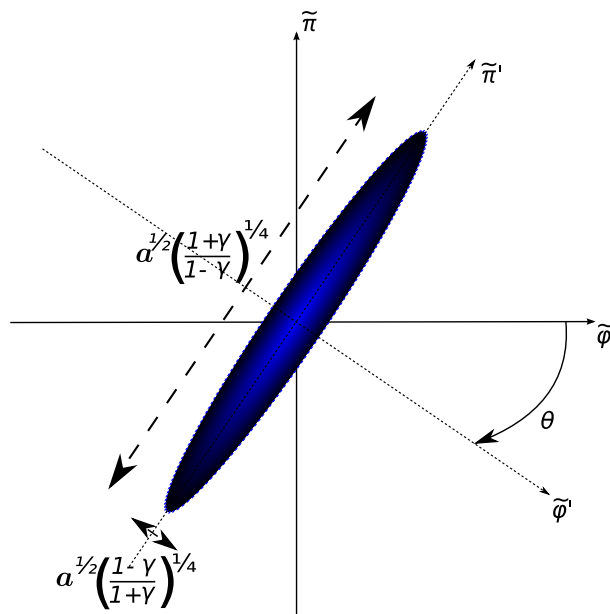


FIG. 3.2 – Représentation de la matrice densité dans l'espace des phases (où $\tilde{\varphi} \equiv \sqrt{\epsilon}\varphi$ et $\tilde{\pi}\sqrt{\epsilon} \equiv \pi$) en théorie classique des champs. La courbe passant par les points situés à e^{-1} de la hauteur maximale forme une ellipse. Les propagateurs F , K et R peuvent être interprétés comme la taille et l'inclinaison de celle-ci alors que n et γ comme son excentricité.

dans la base des états cohérents. Il peut être directement relié au paramètre δ des références [12, 13].

Si on représente (figure (3.2)), par une image classique, la matrice densité dans l'espace des phases (des champs adimensionnés $\tilde{\varphi} \equiv \sqrt{\epsilon}\varphi$ et $\tilde{\pi}\sqrt{\epsilon} \equiv \pi$) alors l'image obtenue est une gaussienne dans les deux variables dont le contour à e^{-1} de sa hauteur maximale est une ellipse centrée à l'origine ayant pour axes la valeur des propagateurs F (dans la direction de l'axe du champ) et K (dans la direction de l'axe du moment conjugué) et dont l'angle formé par l'axe principal de l'ellipse et l'axe $K = 0$ est relié au propagateur R . Dans cette représentation, n et γ peuvent être vus comme les paramètres définissant l'excentricité de l'ellipse.

Une observable $\mathcal{O}(t)$ admet pour valeur moyenne

$$\langle \mathcal{O}(t) \rangle = \text{tr} [\mathcal{O}(t) D(t)], \quad (3.31)$$

par conséquent la valeur moyenne de la matrice densité est

$$\langle D(t; k) \rangle = \text{tr} [D^2(t; k)] = \frac{1}{2n(t; k) + 1} \leq 1. \quad (3.32)$$

De cette relation, on note particulièrement que $n(t; k)$ est indépendant de la base dans laquelle on l'exprime étant donné qu'elle est la seule quantité intervenant dans la $\text{tr} [D^2(t; k)]$, elle même indépendante de la base d'après les propriétés fondamentales de la trace d'une matrice. On dira qu'un mode est dans un état pur si la valeur moyenne de sa matrice

⁴ π est le moment conjugué de ϕ .

densité⁵ (réduite) est égale à l'unité

$$\langle D(t; k) \rangle = 1 \Leftrightarrow \text{LE MODE } k \text{ EST DANS UN ETAT PUR.} \quad (3.33)$$

On note de l'équation (3.32) que pour obtenir un état pur, il faut que $n(t; k) \ll 1$. Ceci est une condition nécessaire à la pureté de l'état mais non suffisante à sa cohérence. On peut toujours avoir un système avec peu de particules mais dans un état non cohérent. A ce niveau on peut insister sur le fait que $\gamma_k(t)$ informe sur la cohérence du système, notion dépendante de la base comme il peut être défini par exemple⁶ la taille des corrélations entre éléments distants de la matrice densité exprimée dans une base. La trace de cette matrice densité, par définition indépendante de la base choisie, est lié au nombre n de particules⁷ (également indépendant de la base) et informe sur la pureté de l'état. On apprend de nos simulations que le choix d'échelle

$$\epsilon_k(t) = \sqrt{k^2 + M_{MF}^2(t)} \quad (3.34)$$

correspond au mieux à la fréquence d'oscillations de la fonction de corrélation, ce qui donne une échelle d'énergie (choix de base) privilégiée dans le système. Dans cette base, on peut se permettre d'utiliser $\gamma_k(t)$ comme un paramètre qui caractérise l'éloignement de l'état du système par rapport à un état thermique.

D'après les définitions (3.28) et (3.29) on remarque que $0 \leq a(t; k) \leq \bar{a}(t; k)$, ce qui borne $\gamma_k(t)$

$$0 \leq \gamma_k(t) \leq 1. \quad (3.35)$$

1. Si $n(t; k)$ et $\bar{n}(t; k)$ sont égaux, $\gamma_k(t)$ s'annule. Pour cela la seule solution consiste à prendre $R(t, t; k) = 0$ et $K(t, t; k) = \epsilon_k^2(t)F(t, t; k)$. Cette solution particulière s'apparente à une matrice densité thermique⁸ avec un β dépendant du mode et du temps. Celle-ci tend à une véritable matrice densité thermique (β constant et homogène) uniquement aux temps longs (thermalisation).

$$D(t; k) = \mathcal{A} \exp \kappa(t; k) F(t, t; k) \left[\pi^\dagger(t; \vec{k}) \pi(t; \vec{k}) + \epsilon_k^2(t) \varphi^\dagger(t; \vec{k}) \varphi(t; \vec{k}) \right]. \quad (3.36)$$

Etant donné que $R(t, t; k) = 0$, et comme on le voit sur l'expression (3.36), cette configuration correspond à un ensemble mixte où les corrélations entre φ et π sont nulles.

2. Maintenant si $n(t; k) \ll 1 \ll \bar{n}(t; k)$, alors la relation (3.32) nous dit que nous sommes dans le cas d'un état pur et l'équation (3.30) donne $\gamma_k(t) \rightarrow 1$. On a donc les deux extrémités du paramètre $\gamma_k(t)$ en fonction d'une variable canonique, indépendante de la base. Ce paramètre pourra nous servir d'indicateur de l'éloignement du système par rapport à l'état thermique. On peut noter que la limite $\gamma_k(t) \rightarrow 1$ peut être

⁵Par mode.

⁶Il peut être aisément relié au paramètre δ de l'article [13].

⁷Parfois nommé nombre particules statistique ou entropique.

⁸Une matrice densité thermique s'écrit sous la forme $D_{th} \sim e^{\beta \mathcal{H}}$ où \mathcal{H} est le hamiltonien du système.

atteinte avec $1 \ll n(t; k) \ll \bar{n}(t; k)$ mais dans ce cas la condition (3.33) n'étant pas vérifiée, on ne peut pas conclure que le système se trouve dans un état cohérent.

3. Il reste un dernier cas, celui où $n(t; k) = \bar{n}(t; k) = \gamma_k(t) = 0$ qui est un cas particulier à la fois du type 1, pour avoir un $n(t; k) = \bar{n}(t; k)$, et du type 2, pour avoir un $n(t; k) \ll 1$. Il s'agit ici d'un système à la fois pur et thermal. Seul le vide de la théorie est capable de remplir ces deux conditions à la fois.

3.3 Préparation d'un état cohérent et conditions initiales

Nous voulons initialiser le système avec une matrice densité gaussienne la plus générale possible en terme de $\gamma_k(t = 0)$ et $n(t = 0)$. Pour cela reprenons la définition de la matrice densité (3.25) et exprimons les fonctions à deux points (3.20)-(3.22) en fonction de nos paramètres choisis.

Le champ scalaire exprimé en terme d'opérateur création et annihilation prend la forme

$$\varphi(t; \vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_k(t)}} \frac{\hat{a}_{\vec{k}}(t) + \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger(t)}{\sqrt{2}} \quad (3.37)$$

$$\pi(t; \vec{k}) = i\sqrt{\epsilon_k(t)} \frac{\hat{a}_{\vec{k}}(t) - \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger(t)}{\sqrt{2}} \quad (3.38)$$

où les opérateurs $\hat{a}_{\vec{k}}$ et $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$ sont respectivement les opérateurs annihilation et création respectant les relations habituelles suivantes

$$[\hat{a}_{\vec{k}}(t), \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger(t)] = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (3.39)$$

$$\langle \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger(t) \hat{a}_{\vec{k}}(t) \rangle = n_a(t; \vec{k}) \quad (3.40)$$

$$\langle \hat{a}_{\vec{k}}(t) \hat{a}_{-\vec{k}}(t) \rangle = q_a(t; \vec{k}). \quad (3.41)$$

En combinant les définitions (3.9), (3.20), (3.22) et (3.40) on obtient que

$$n_a(t; k) = \bar{n}(t; k). \quad (3.42)$$

De tout ce qui précède on peut paramétrer les propagateurs à temps égaux sous la forme

$$F(t, t; k) = \frac{n(t; k) + \frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \gamma_k^2(t)}} \frac{1 + \gamma_k(t) \cos \phi_k(t)}{\epsilon_k(t)} \quad (3.43)$$

$$R(t, t; k) = \frac{n(t; k) + \frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \gamma_k^2(t)}} \gamma_k(t) \sin \phi_k(t) \quad (3.44)$$

$$K(t, t; k) = \frac{n(t; k) + \frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \gamma_k^2(t)}} [1 - \gamma_k(t) \cos \phi_k(t)] \epsilon_k(t) \quad (3.45)$$

où, d'après les relations (3.28) et (3.30), la quantité

$$\frac{n(t; k) + \frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \gamma_k^2(t)}} \equiv \bar{a}(t; k), \quad (3.46)$$

et où $\phi_k(t)$ est la phase du nombre de paires $q_a(t; k) \equiv |q_a(t; k)|e^{i\phi_k(t)}$.

On peut remarquer que si $\phi_k(t) = \frac{\pi}{2}$ alors on obtient

$$\epsilon_k(t)^2 F(t, t; k) = K(t, t; k) \quad (3.47)$$

$$\gamma_k(t) R(t, t; k) = \epsilon_k(t) F(t, t; k) \quad (3.48)$$

et les propagateurs deviennent tous du même ordre $\frac{1}{\sqrt{1 - \gamma_k^2(t)}}$.

On peut également voir cette phase ϕ_k comme un angle de rotation dans l'espace des phases⁹.

Conditions Initiales

Prises à $t = 0$, les relations (3.43)-(3.45) sont directement implémentées numériquement comme conditions initiales de l'équation (3.11) tandis que les conditions initiales de l'équation (3.12) sont données par la mécanique quantique comme expliqué dans la section (1.6) du chapitre (1) par les relations (1.79) - (1.81).

3.4 Résultats et interprétation

Je présente dans cette section les résultats des simulations des équations (3.11) et (3.12) implémentées numériquement sans autre approximation si ce n'est la discretisation du temps et de la composante radiale de l'impulsion ainsi que la coupure de mémoire des intégrales en temps du r.h.s. des équations du mouvement. J'étudie deux systèmes principalement. Le premier dit du condensat sans environnement et le deuxième, un condensat plongé dans un bain thermique. L'image n'est pas à prendre dans l'espace directe mais plutôt dans l'espace des impulsions. Nous travaillerons toujours en unité de la masse initiale du champ et avec 4 champs scalaires.

Dans les études menées, on initialise le système avec tous les modes $k < k_c$ dans un état pur et cohérent tel qu'il est défini dans le point (2) de la section (3.2) et les modes $k > k_c$ dans le vide. Le mode k_c représente la coupure qui sépare le sous-système de basse énergie, le condensat, et l'environnement extérieur.

Si le membre de droite des équations du mouvement est nul, alors on peut montrer facilement que $\dot{n}(t; k) \equiv 0$. Par conséquent si le nombre de quasi-particules initial est nul, il le reste nul tout au long de l'évolution du système. Il en vient donc que si l'état est pur à l'instant initial ($n(t; k) = 0 \Leftrightarrow \text{tr}[D^2(t; k)] = 1$) alors l'état conserve sa pureté tout au long de l'évolution. En d'autres termes, l'écart à la valeur nulle de la dérivée temporelle du nombre de quasi-particule mesure la perte d'information de l'observateur au cours du temps. On souligne alors qu'en approximations du type linéaire ou champ-moyen, le système ne décohère pas. Ceci n'est pas en contradiction avec les références [97, 11] (pour l'approximation linéaire) et [101, 108] (pour l'approximation de champ-moyen) étant donné que dans leur cas, ils considèrent une matrice densité effective ayant subi un processus d'intégration des degrés de liberté de haute énergie.

⁹Voir démonstration en annexe J.

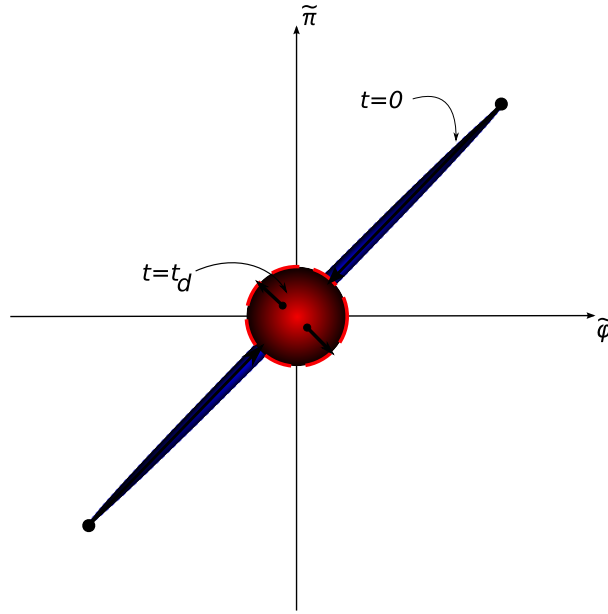


FIG. 3.3 – Représentation de l'évolution de la matrice densité dans l'espace des phases (où $\tilde{\varphi} \equiv \sqrt{\epsilon}\varphi$ et $\tilde{\pi}\sqrt{\epsilon} \equiv \pi$) au cours de la phase de décohérence du système. Initialement une ellipse, elle tend à un cercle au fur et à mesure que γ tend vers zéro à $t = t_d$. La surface du cercle est proportionnelle au nombre de particules. Au cours de la décohérence celle-ci augmente représentant la mixture du système.

On s'attend donc à ce que le processus de décohérence modifie les paramètres caractéristiques de l'ellipse représentant¹⁰ la matrice densité à l'instant initiale en un cercle toujours centré à l'origine de rayon lié à $n(t \rightarrow \infty; k) \ll 1$ (comme nous observons dans les résultats de simulations). Cette image est représenté par la figure (3.3).

3.4.1 Un condensat sans environnement extérieur

On étudie plus précisément donc un système de basse énergie initialisé dans un état pur placé dans un vide de haute-energies.

Pour les simulations qui suivront, nous avons pris

$$\phi_k(0) = -\frac{\pi}{2}\Theta(k_c - k) \quad (3.49)$$

$$\gamma_k(0) = \gamma_0\Theta(k_c - k) \quad (3.50)$$

$$n(0; k) = \frac{1}{e^{\beta_k \epsilon_{k,0} \sqrt{1-\gamma_{k,0}^2}} - 1} \quad (3.51)$$

où $\Theta(x)$ est la fonction de Heaviside¹¹, $\epsilon_{k,0} = \sqrt{k^2 + M_0^2}$, $\beta_k = \beta_{co}\Theta(k_c - k) + \beta_{vac}\Theta(k - k_c)$ et $M_0 = M_{MF}(t = 0)$. On peut représenter cet état initial dans l'espace des phases par l'ellipse (comme d'habitude cette représentation est valable uniquement en mécanique classique) très aplatie ($\gamma_0 \rightarrow 1$) pour les modes inférieurs à la coupure et le cercle de petit rayon (le vide de quasi-particule) pour les autres modes comme sur la figure (3.4).

¹⁰On rappelle qu'il s'agit d'une représentation valide en mécanique classique et qu'ici elle nous sert juste de support visuel.

¹¹Qui s'annule pour un argument négatif et vaut l'unité autrement.

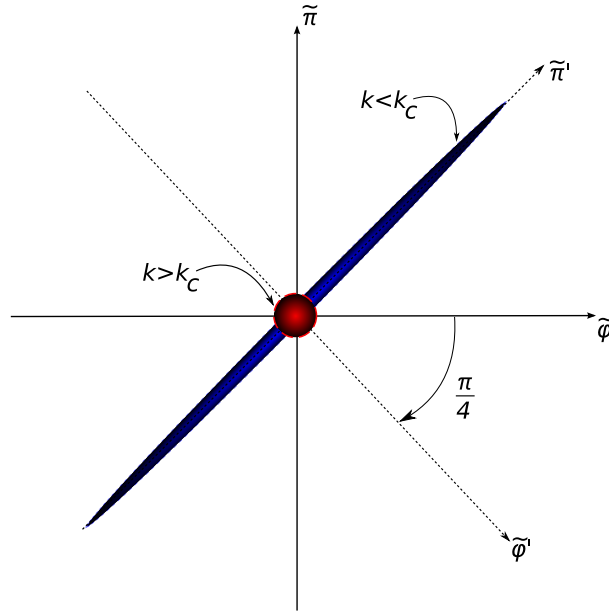


FIG. 3.4 – Représentation de la matrice densité dans l'espace des phases (où $\tilde{\varphi} \equiv \sqrt{\epsilon}\varphi$ et $\tilde{\pi}\sqrt{\epsilon} \equiv \pi$) à l'instant initial avec $\gamma_k(0) = \gamma_0\Theta(k_c - k)$ ($\gamma_0 \rightarrow 1$), $\phi_k(0) = -\frac{\pi}{2}\Theta(k_c - k)$ et le vide de quasi-particules pour les modes supérieurs à la coupure.

Pour simuler un vide, dans un premier temps on utilise un $M_0\beta_{\text{vac}} = 10$ assurant ainsi que le nombre de particules est très faible. La valeur β_{co} varie selon les cas tout en restant grand devant l'inverse de la masse pour respecter la condition de cohérence de l'état initial du condensat. Cette valeur varie afin de conserver le produit $\beta_{\text{co}}\gamma_0$ constant pour que l'énergie initiale reste constante. La coupure séparant le condensat du vide est placée à $k_c = 3.9M_0$ tandis que le cut-off UV est à $\Lambda = 10M_0$. Nous plaçons dans cet intervalle, 64 modes ¹² ce qui place le cut-off IR à $k_{\text{min}} \simeq 0.16M_0$.

Nous verrons plus tard une étude sur la variation de la phase ϕ_k et du rapport $\frac{k_c}{M_0}$.

résultats

Peu importe les conditions initiales du système, à l'équilibre le nombre de particules doit suivre une distribution de Bose-Einstein

$$n_k^{\text{eq}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1} \quad (3.52)$$

où $T = \frac{1}{\beta}$ est la température et μ une sorte de potentiel chimique, à l'équilibre. Le potentiel chimique défini ici n'est qu'une analogie. Sa véritable définition est celle de l'ordonnée à l'origine de la droite qui représente la quantité $\ln \left[1 + \frac{1}{n_k} \right]$ dans le repère d'abscisse ϵ_k .

La figure (3.5) montre la fonction $\ln \left[1 + \frac{1}{n(t_i; k)} \right]$ en fonction de $\epsilon_k(t_i)$ à différents instants t_i . Cette fonction, dans le cas d'une distribution de Bose-Einstein¹³, se trouve être une droite (dans la variable $\epsilon_k(t_i)$) de pente $\beta \equiv \frac{1}{T}$ et ayant pour ordonné à l'origine

¹²le nombre de modes doit être une puissance entière de 2, voir chapitre(1) pour plus de précisions

¹³Donc dans le cas d'un système qui a atteint son équilibre thermique.

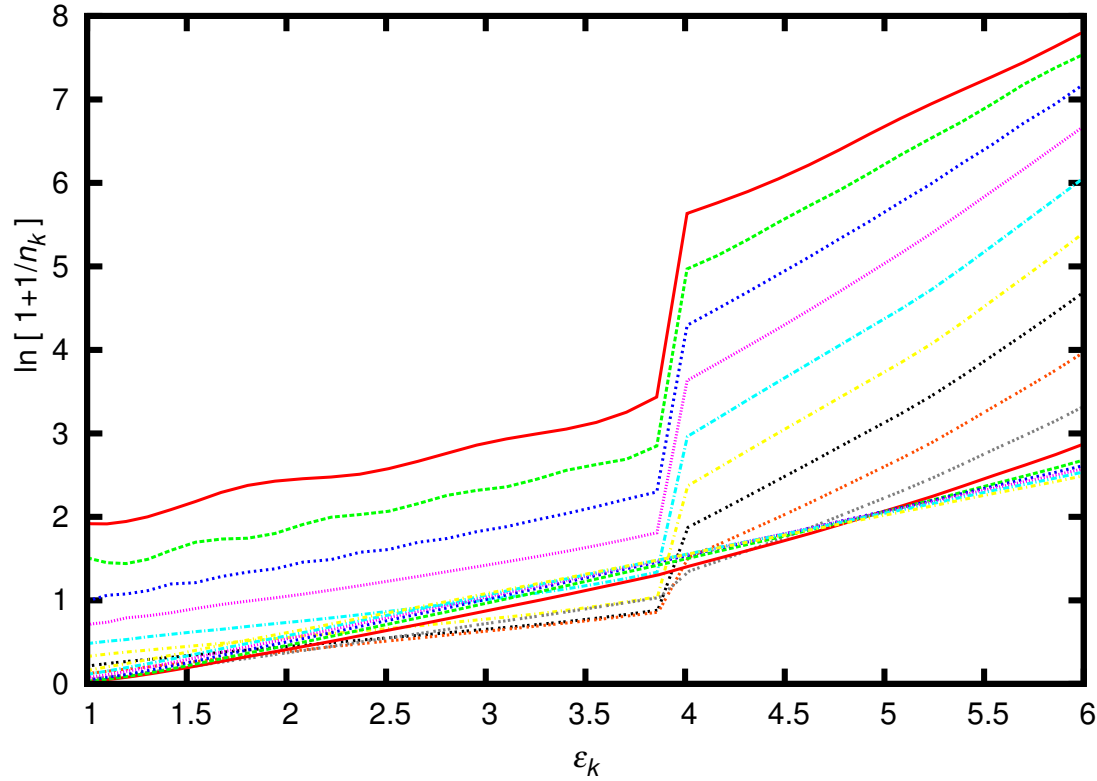


FIG. 3.5 – Fonction $\ln \left[1 + \frac{1}{n(t_i; k)} \right]$ en fonction de $\epsilon_k(t_i) = \sqrt{k^2 + M_{MF}^2(t_i)}$ pour $M_0 t_i = 2.5 \times 2^i$ où $i = 0, \dots, 14$. On a pris les conditions initiales suivantes $\gamma_0 = 0.97561$, $M_0 \beta_{\text{con}}(0) = 41.64$, $M_0 \beta_{\text{vide}}(0) = 10$ et $\lambda = 4.76$. Dans cette représentation, une distribution de Bose-Einstein est représenté par une droite de pente $\beta \equiv \frac{1}{T}$ (où T est la température du système) et ordonné à l'origine $c \equiv -\frac{\mu}{T}$ (où μ est le potentiel chimique du système).

$c = -\frac{\mu}{T}$ où T est la température du système et μ son potentiel chimique, tous deux définis à l'équilibre thermodynamique. Elle montre d'une part la croissance rapide du nombre de quasi-particules et d'autre part le retour à l'équilibre d'un système initialisé comme décrit plus haut.

Sur la figure (3.6) on présente $\gamma_k(t)$ en fonction du temps. Ce paramètre caractérise quelque part l'état de cohérence du système. On voit sur cette figure que le système décohère exponentiellement vite (pour des modes proches infra-rouge) vers une constante petite devant l'unité et n'évolue presque plus. Une fois décohéré, le système ne recohère plus. Il est incapable de revenir, même partiellement, à un état cohérent. Cette caractéristique de perte de mémoire du système est le propre de la dynamique du retour à l'équilibre.

Au temps très long (proche de l'équilibre) on voit sur les figures (3.7) et (3.8) que température et potentiel chimique s'équilibrent entre les deux systèmes et n'évoluent (presque) plus. Sur ces mêmes figures on remarque deux échelles de temps différentes. La première étant le temps d'équilibration cinétique, ayant lieu, pour cette simulation, autour de $\tau_{\text{cin}} \simeq 10^4 M_0 t$, et la deuxième, l'équilibration chimique, ayant lieu autour de $\tau_{\text{chim}} \simeq 3 \cdot 10^4 M_0 t$. Ceci est à comparer avec le temps typique de décohérence du système, caractérisé par le taux de décroissance du paramètre $\gamma_k(t)$ pris à $k = k_{\text{min}} = 0.16 M_0$, qui vaut, pour la simu-

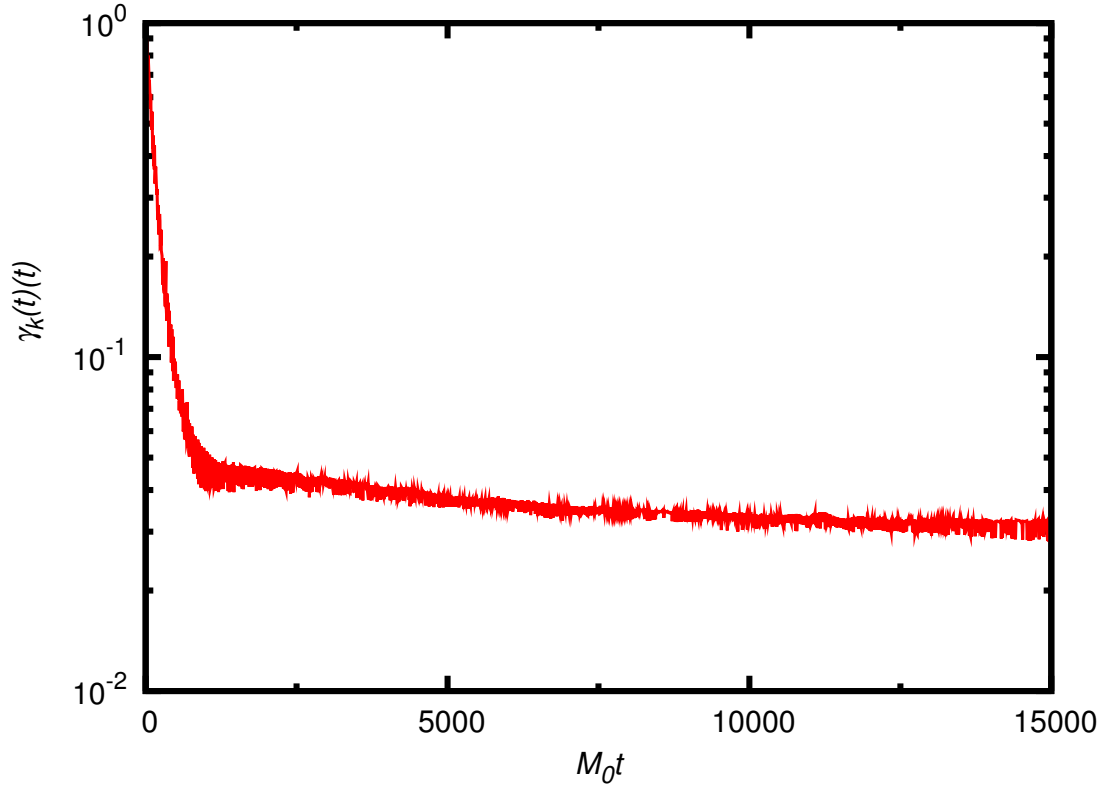


FIG. 3.6 – Evolution du paramètre $\gamma_{k=0.16M_0}$ en fonction du temps en unité de la masse initiale. Il décroît exponentiellement vite vers une constante (petite devant l'unité) et n'évolue alors presque plus. Le temps pendant lequel a lieu cette décroissance est de l'ordre de $10^3 M_0 t$. On a pris le jeu de paramètres suivant $\gamma_0 = 0.97561$, $M_0 \beta_{\text{con}}(0) = 41.64$, $M_0 \beta_{\text{vide}}(0) = 10$ et $\lambda = 4.76$.

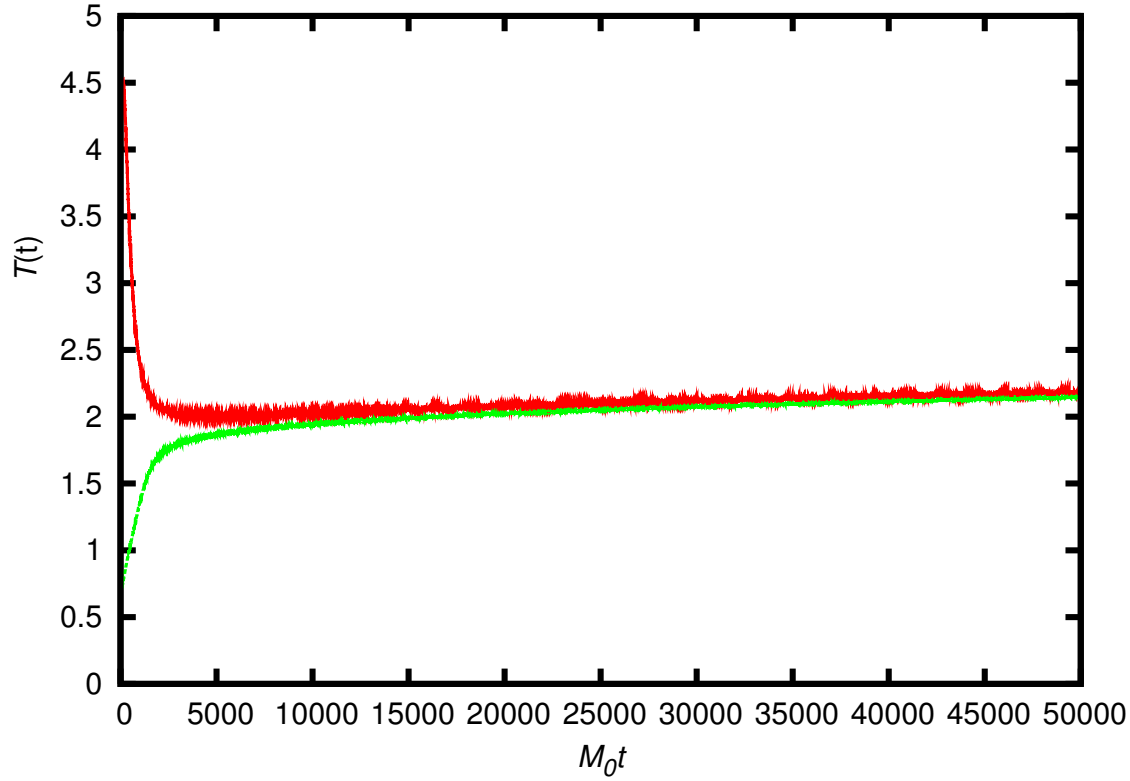


FIG. 3.7 – Evolution de la température du condensat (trait plein - en rouge) et du vide (tirets long - vert). On ne peut réellement parler de température qu'aux temps très long mais ici on la définit comme étant l'inverse de la pente de la meilleure droite passant par les points de la courbe $\ln \left[1 + \frac{1}{n(t;k)} \right]$ (fonction de $\epsilon_k(t)$). On a pris le jeu de paramètres suivant $\gamma_0 = 0.97561$, $M_0\beta_{\text{con}}(0) = 41.64$, $M_0\beta_{\text{vide}}(0) = 10$ et $\lambda = 4.76$.

lation de la figure (3.6) $\tau_{\text{deco}} \simeq 10^3 M_0 t \ll \tau_{\text{cin}} < \tau_{\text{chim}}$. Rappelons tout de même ici que ce potentiel chimique n'a comme définition que l'ordonné à l'origine des droites présentées sur la figure (3.5) et dépend très sensiblement du choix d'énergie des quasi-particules (donc de la définition de celles-ci).

Dans l'ordre, nous atteignons très rapidement une perte de la pureté de notre condensat, suivie de la décohérence des modes de basse énergie, puis à une échelle de temps bien supérieure, l'équilibration cinétique et pour finir, un peu plus tard, l'équilibration chimique.

Un paramètre intéressant à mesurer, est le saut que présente la courbe $\ln \left[1 + \frac{1}{n_k} \right]$ à l'abscisse $k = k_c$. Ce paramètre, $\delta(t)$, se définit donc par

$$\delta(t) = \ln \left[1 + \frac{1}{n_{k_c}} \right] - \ln \left[1 + \frac{1}{n_{k_c - A_S}} \right] = \ln \left[\frac{n_{k_c - A_S}(t) (1 + n_{k_c}(t))}{n_{k_c}(t) (1 + n_{k_c - A_S}(t))} \right] \quad (3.53)$$

ce qui, exprimé en terme de température et potentiel chimique, donne

$$\delta(t) = \beta_{\text{vac}}(t) [\epsilon_{k_c}(t) - \mu_{\text{vac}}(t)] - \beta_{\text{co}}(t) [\epsilon_{k_c}(t) - \mu_{\text{co}}(t)]. \quad (3.54)$$

Les notions de température et potentiel chimique au temps t sont à prendre au sens de coefficient directeur et ordonné à l'origine de la meilleure droite passant par la courbe

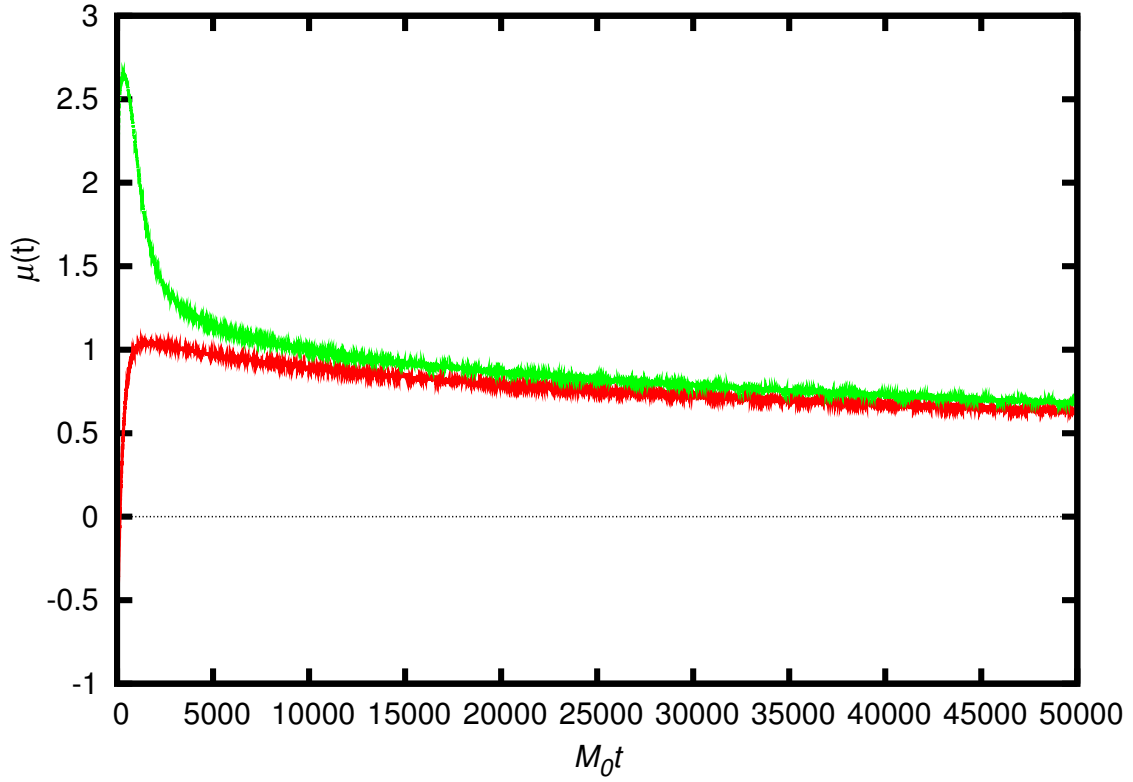


FIG. 3.8 – Evolution du potentiel chimique du condensat (trait plein - en rouge) et du vide (tirets long - vert). Le potentiel chimique ici est défini comme $\mu = -cT$ où c est l'ordonnée à l'origine de la meilleure droite passant par les points de la courbe $\ln \left[1 + \frac{1}{n_k} \right]$ (fonction de k). On a pris le jeu de paramètres suivant $\gamma_0 = 0.97561$, $M_0\beta_{\text{con}}(0) = 41.64$, $M_0\beta_{\text{vide}}(0) = 10$ et $\lambda = 4.76$.

$\ln \left[1 + \frac{1}{n_k} \right]$, et tendent vers la température et le potentiel chimique du système uniquement aux temps longs. On présente l'évolution de ce paramètre pour les valeurs $\gamma_0 = 0.97561$, $M_0\beta_{\text{con}}(0) = 41.64$, $M_0\beta_{\text{vide}}(0) = 10$ et $\lambda = 4.76$ sur la figure (3.9) où a été soustrait la constante à temps long $\delta(t \rightarrow \infty)$. On montre donc que l'évolution de ce paramètre, pour cette simulation, semble obéir à une loi exponentielle avec deux échelles caractéristiques : l'une à temps court ayant un taux de décroissance très élevé sur une très courte durée de la simulation, et l'autre à temps long ayant un taux de décroissance très petit mais sur une très longue durée de la simulation.

L'intérêt de ce paramètre est que son évolution dans le temps est directement liée aux collisions (membre de droite des équations du mouvement) entre les degrés de liberté. Sans le terme de collisions dans les équation du mouvement, on peut aisément montrer que $\dot{n}_k(t) = 0$ et par conséquent $\dot{\delta}(t)$ aussi. La fonte de ce paramètre est le reflet de la non-localité des e.o.m. à travers des self-energies non-locales.

Malgré l'apparence exponentielle de la courbe de la figure (3.9), on ne peut pas dire que le processus soit markovien. Tout d'abord par construction, ce processus n'est pas markovien par la simple présence de ces intégrales de mémoire des équation du mouvement. Cependant on peut voir sur la figure (3.9) qu'à temps très long, là où les intégrales de mémoire sont le plus visibles, la courbe s'écarte des caractéristiques d'une exponentielle. Il ne faut pas oublier que ce paramètre δ est un paramètre parmi tant d'autre. Pour parler d'un processus markovien, il faudrait obtenir des lois exponentielles à chaque observable ce qui n'est pas le cas pour, par exemple l'observable $\text{tr} [D^2(t; k)]$. De plus un processus markovien évolue selon une loi exponentielle ne laissant pas la possibilité d'un changement de taux de décroissance au cours du temps.

D'après la définition de δ , sa valeur aux temps longs est reliée à la température par

$$\delta(t \rightarrow \infty) = \beta A_S \quad (3.55)$$

où A_S est le pas du réseaux (ou également le cut-off infra-rouge de la théorie) et β l'inverse température du système à l'équilibre. Sur la figure (3.10) on trace le paramètre δ pour différentes valeurs du couple $[\gamma_0, \lambda]$. Si on prend la courbe $[\gamma_0, \lambda] = [0.99, 3.05]$ (trait plein - rouge), sachant que $A_S = 0.15625$ pour toutes nos simulations, et mesurant la température du système à l'équilibre, $T = 2.7M_0$, on obtient $\delta(t \rightarrow \infty) = 0.058$ comme on peut le lire sur la figure (3.10). Sur cette figure, ont été tracées d'autres valeurs du couple $[\gamma_0, \lambda] = [0.95, 6.62]$ (tirets long - vert) où $\lambda_{eff} = 21.7$ et $= [0.95, 2.2]$ (tirets - bleue) où $\lambda_{eff} = 7.22$, $[0.95, 0.915]$ (pointillés - violet) où $\lambda_{eff} = 3.0$. On distingue nettement les courbes ayant le même $\gamma_k(0)$ de celle ayant un $\gamma_k(0)$ différent. Parmi tous les paramètres qui ont varié d'un cas à l'autre, gamma est le seule intervenant dans l'énergie totale du système et donc dans la température à l'équilibre. On illustre une fois de plus que la température du système à l'équilibre ne dépend ni des détails de la dynamique ni des détails des conditions initiales mais uniquement de l'énergie contenue dans le système, conservée au long de son évolution.

On peut définir la densité d'énergie totale du système au temps initial comme étant

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(0) = & \int_0^{k_c} \frac{k^2 dk}{2\pi^2} \frac{\epsilon_k(0)}{\sqrt{1 - \gamma_0^2}} \left(\frac{1}{e^{\beta_{co}\epsilon_k(0)\sqrt{1 - \gamma_0^2}} - 1} + \frac{1}{2} \right) \\ & + \int_{k_c}^{\Lambda} \frac{k^2 dk}{2\pi^2} \epsilon_k(0) \left(\frac{1}{e^{\beta_{vac}\epsilon_k(0)} - 1} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.56)$$

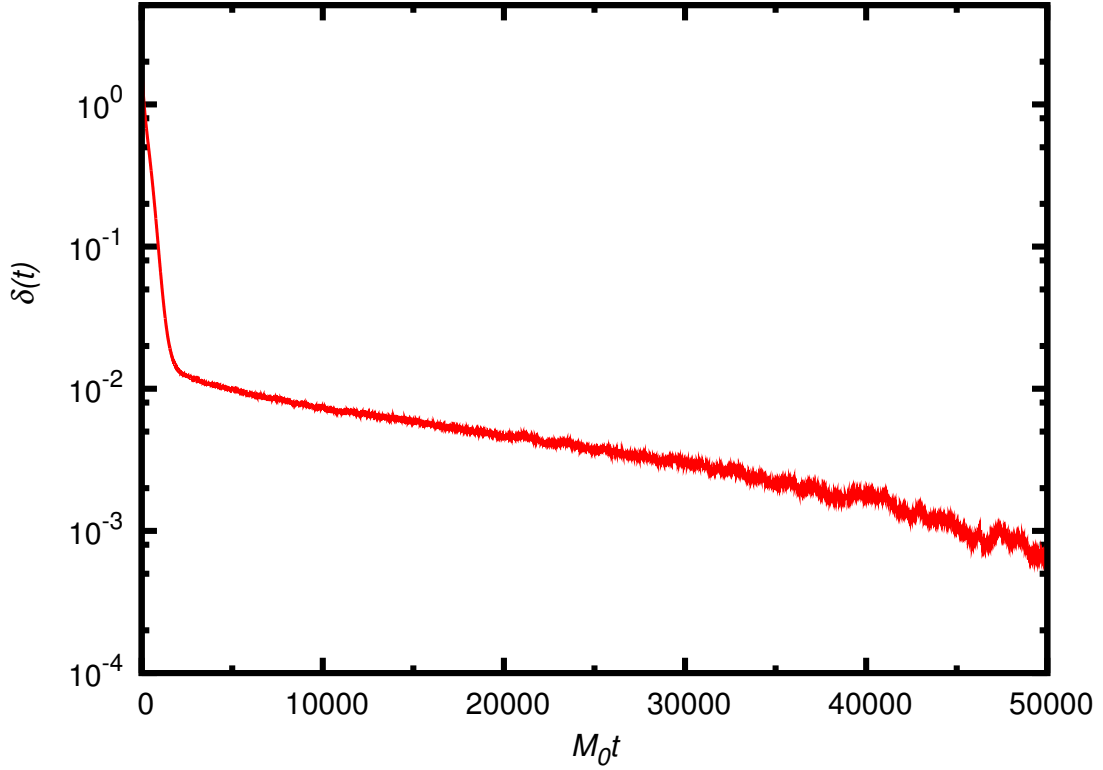


FIG. 3.9 – $\delta(t)$ en fonction du temps (en unité de masse). Il est défini comme $\delta(t) = \ln \left[\frac{n_{k_c - A_S}(t)(1 + n_{k_c}(t))}{n_{k_c}(t)(1 + n_{k_c - A_S}(t))} \right]$. Ce paramètre mesure le saut que comporte la courbe $\ln \left[1 + \frac{1}{n_k} \right]$ en $k = k_c$. On a pris le jeu de paramètres suivant $\gamma_0 = 0.97561$, $M_0 \beta_{co}(0) = 41.64$ et $\lambda = 4.76$. Elle peut être décrite par deux exponentielles décroissantes. Pour obtenir des droites en échelle logarithmique il a fallu soustraire la valeur $\delta(t \rightarrow \infty)$.

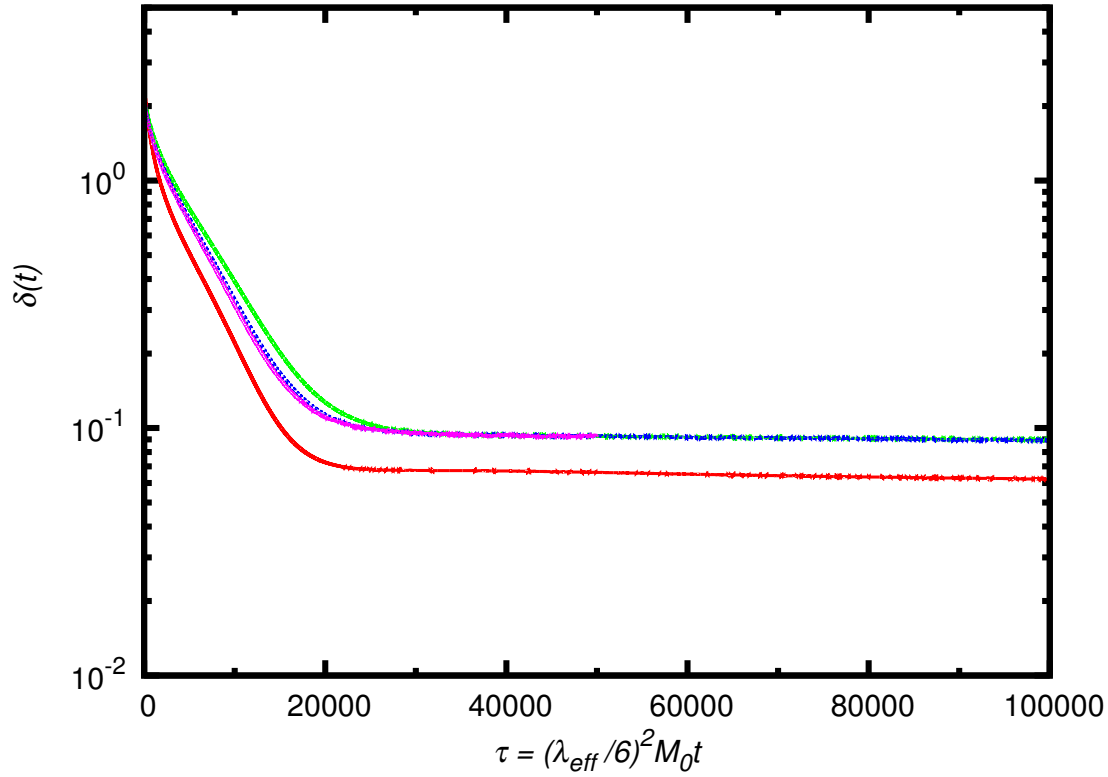


FIG. 3.10 – D'après la définition de $\delta(t)$, sa valeur à temps long est directement reliée à la température à l'équilibre par $\delta(t \rightarrow \infty) = \beta A_S$. Comme attendu, celle-ci ne dépend absolument pas du couplage ou des conditions initiales mais uniquement de l'énergie totale initiale du système. Cette dernière est proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{1-\gamma_0^2}}$, dans les différents couples de paramètres $[\gamma_0, \lambda] = [0.99, 3.05]$ (trait plein - rouge), $= [0.95, 6.62]$ (tirets long - vert) où $\lambda_{eff} = 21.7$ et $= [0.95, 2.2]$ (tirets - bleue) où $\lambda_{eff} = 7.22$, $[0.95, 0.915]$ (pointillés - violet) où $\lambda_{eff} = 3.0$.

Aux temps longs, le système thermalisé obéit à une distribution de Bose-Einstein du type (3.52) à potentiel chimique nul. L'énergie finale est donc

$$\mathcal{E}(t \rightarrow \infty) = \int_0^\Lambda \frac{k^2 dk}{2\pi^2} \epsilon_k(t \rightarrow \infty) \left(\frac{1}{e^{\beta \epsilon_k(t \rightarrow \infty)} - 1} + \frac{1}{2} \right) \quad (3.57)$$

où β est l'inverse température du système. D'après la conservation de l'énergie, on peut estimer la température finale du système (en inversant numériquement la relation (3.56)) avec ses conditions initiales $\gamma_0, \beta_{co}, M_0, k_c, \beta_{vac}$ et, puisque la théorie n'est pas renormalisée, Λ . Ceci faisant, nous trouvons que pour l'accord avec la température finale mesurée sur la courbe de température (3.7) est satisfaisant. L'estimation nous donne $T = 2.1M_0$ alors que la lecture graphique nous donne $T = 2.2M_0$ pour une densité d'énergie initiale de $\mathcal{E}(0) = 66.5M_0$. Ceci peut être répété pour une autre densité d'énergie initiale $\mathcal{E}(0) = 71.2M_0$, (à savoir, toutes choses égales par ailleurs, $M_0\beta_{co} = 64.11, \gamma_0 = 0.99$), et on trouve que la température finale estimée est $T = 2.7M_0$ alors que la température finale mesurée est $T = 2.7M_0$.

On peut remarquer, que le couplage λ n'intervient pas dans l'estimation de la température finale. Ceci est dû à l'universalité de la théorie. La température du système thermalisé ne dépend ni des conditions initiales ni de la dynamique de la théorie, mais uniquement de la densité d'énergie initiale du système.

La figure (3.11) montre l'évolution en temps de $\text{tr}[D^2(t; k_i)]$ pour différents modes du condensat et du vide. Tous les modes sont initialement dans un état pur ($\text{tr}[D^2(0; k_i)] \simeq 1 \forall k_i$) mais tandis que ceux du vide décroissent peu avec le temps, ceux du condensat ont une rapide décroissance vers zéro qui montre la perte de pureté de l'état initial.

La figure (3.12) montre la décroissance exponentielle de $\gamma_{k=0.16M_0}(t)$ en fonction du temps pour plusieurs simulations numériques à différents couplage et γ_0 toujours proche de 1. On remarque que dans toutes ces simulations, la perte de pureté de l'état (montré par la figure (3.11)) s'accompagne d'une perte de cohérence. Le paramètre $\gamma_{k=0.16M_0}(t)$ décroît rapidement vers zéro montant que $\bar{n}(t; 0.16M_0) \approx n(t; 0.16M_0)$. La figure (3.5) montre la rapide croissance du nombre de particule $n(t; k)$ pour tous les modes. On se trouve alors dans le cas (2). La perte de pureté de ce mode s'accompagne donc de la perte de cohérence de ce même mode.

Sur la figure (3.13) on trace le taux de décroissance de $\gamma_k(t)$ en fonction du mode dans le condensat. On observe que pour des petites valeurs de $\frac{k}{M_0}$, les courbes obtenues approchent une parabole décroissante dont le sommet se situe proche de $k = 0$.

Des figures (3.12) et (3.13) on remarque qu'il existe une certaine invariance dans la dynamique de la cohérence et de la pureté du système dans la limite où $\gamma_0 \rightarrow 1$ pour les différents couplages mis en jeu.

En fait dans cette limite, le propagateur $F(t, t; k)$ devient d'ordre $\mathcal{O}(\eta)$ où $\eta \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma_k^2(0)}}$,

comme le suggère la relation (3.43), tandis que le propagateur spectral $\rho(t, t'; k)$ reste d'ordre $\mathcal{O}(1)$. Ceci traduit une mise en valeur des fluctuations classiques par rapport aux fluctuations quantiques du système. On peut alors négliger la contribution de ρ^2 dans l'expression de Π_F (expression de la "bulle" élémentaire pour la resommation des corrections en boucle de l'action effective).

Cette remarque nous permet de factoriser $F(t, t'; k)$ par une constante et λ par l'inverse de cette constante (en gardant $\rho(t, t'; k)$ tel quel) sans changer les équations du mouvement

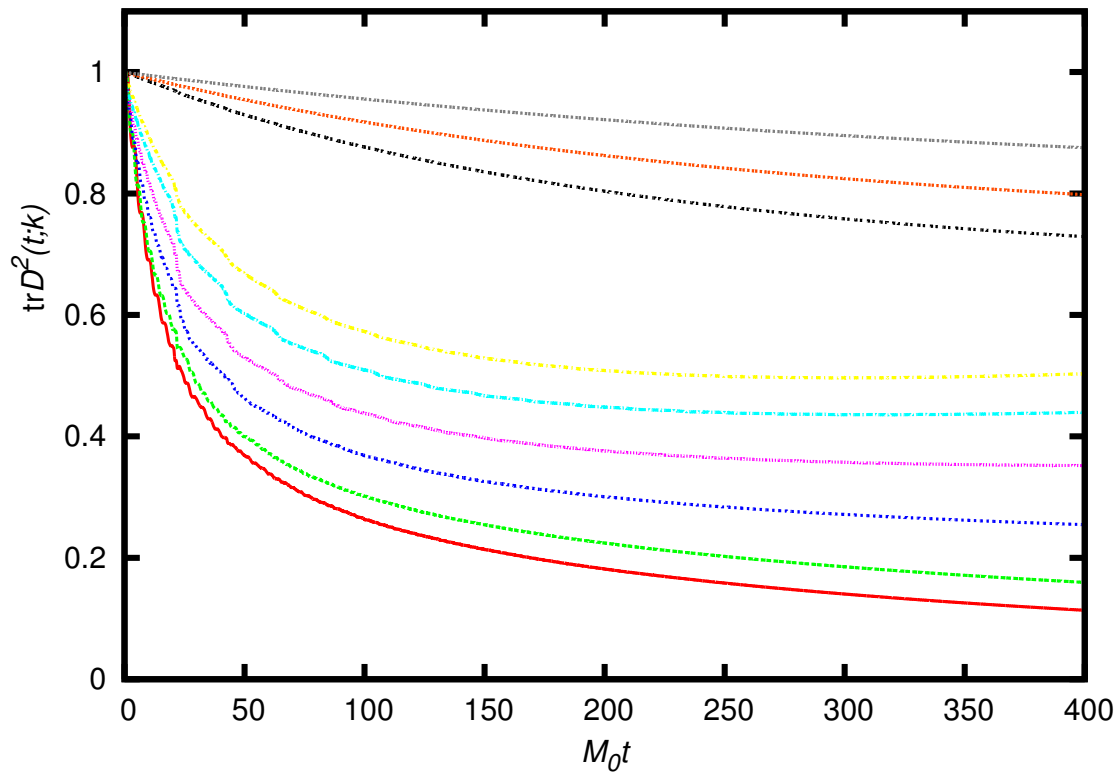


FIG. 3.11 – $\text{tr}[D^2(t; k_i)] = \langle D^2(t; k_i) \rangle$ en fonction du temps en unité de la masse initiale pour $\frac{k_i}{M_0} = 0.16, 0.78, 1.56, 2.34, 3.12, 3.75$ (phase cohérente) et $\frac{k_i}{M_0} = 3.91, 4.22, 4.69$ (vide).

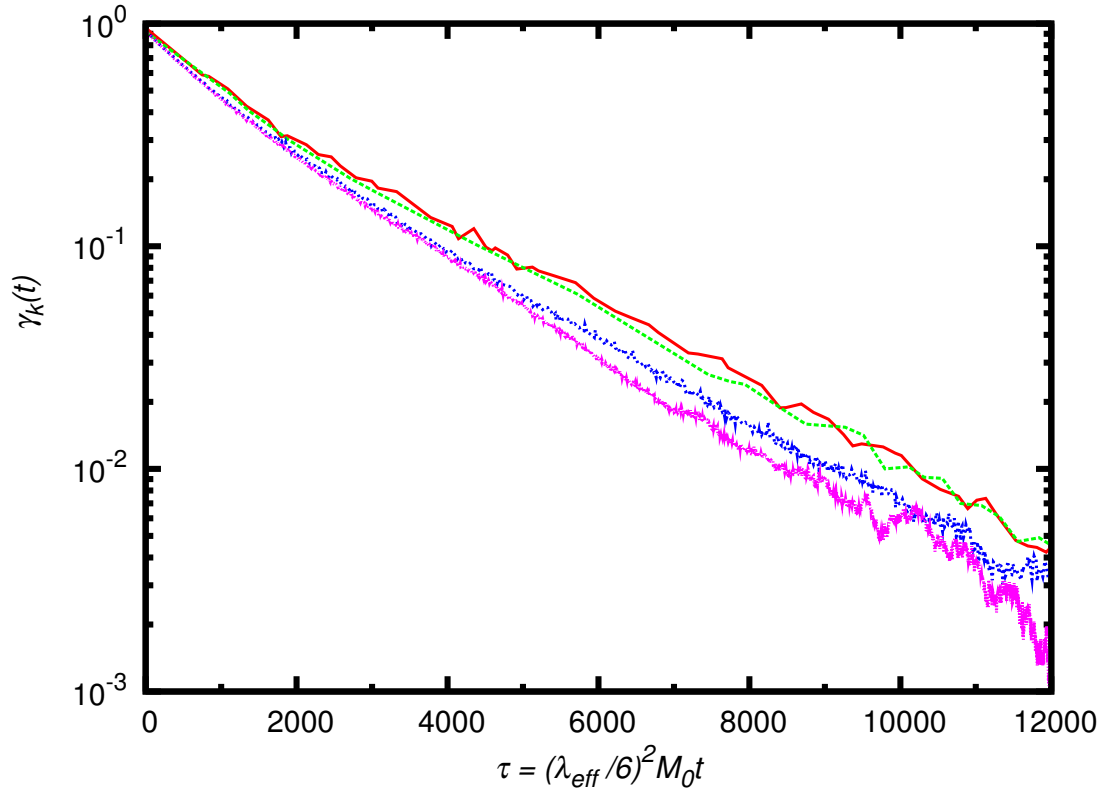


FIG. 3.12 – Décroissance exponentielle du paramètre de cohérence $\gamma_k(t)$ en fonction du temps adimensionné $\tau \equiv \left(\frac{\lambda_{eff}}{6}\right)^2 M_0 t$ pour le mode $k = 0.16M_0$ pour les couples de paramètres $[\gamma_0, \lambda] = [0.99, 3.05]$ (trait plein - rouge), $= [0.95, 6.62]$ (tirets long - vert) où $\lambda_{eff} = 21.7$ et $= [0.95, 2.2]$ (tirets - bleue) où $\lambda_{eff} = 7.22$, $[0.95, 0.915]$ (pointillés - violet) où $\lambda_{eff} = 3.0$.

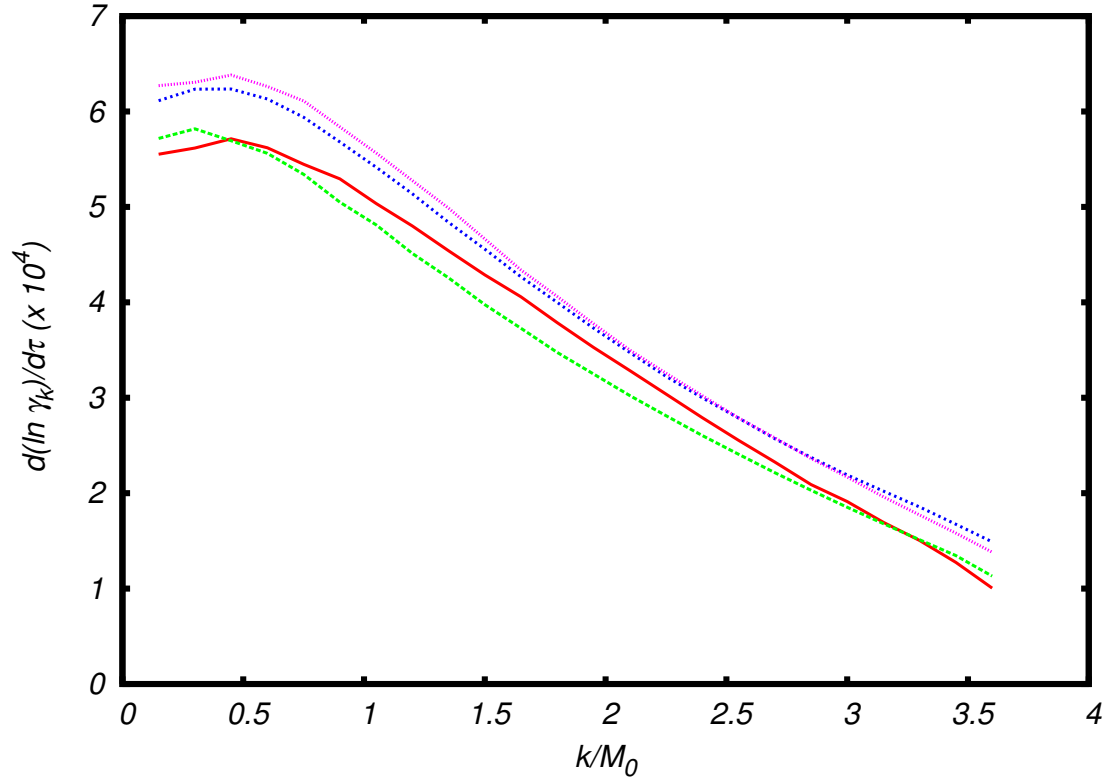


FIG. 3.13 – Taux de décroissance en fonction de l'impulsion dans le condensat obtenus par fit exponentiel des courbes de la figures (3.12). les deux simulations $[\gamma_0, \lambda] = [0.99, 3.05]$ (trait plein - rouge), $= [0.95, 6.62]$ (tirets long - vert) où $\lambda_{eff} = 21.7$ sont suffisamment en accord pour illustrer la description en terme de couplage effectif λ_{eff} . La concordance globale avec les deux autres simulations $[\gamma_0, \lambda] = [0.95, 2.2]$ (tirets - bleue) où $\lambda_{eff} = 21.7$, $[0.95, 0.915]$ (pointillés - violet) où $\lambda_{eff} = 3.0$ est le reflet de la dependance approximative en λ_{eff}^2 .

(3.11) et (3.12) étant donné que Π_F , I_F et Σ_F se transforment¹⁴ comme F et que Π_ρ , I_ρ et Σ_ρ se transforment comme ρ .

Cette transformation met en évidence un régime où les fluctuations quantiques sont si grandes que la théorie statistique des champs classiques est, à elle seule, capable de décrire la dynamique du système [109]. L'action classique se retrouve alors multipliée par η qui, en théorie quantique des champs doit se comparer à \hbar , mais qui ne se compare à aucune échelle en théorie classique des champs. On peut toujours absorber cette constante multiplicative par une renormalisation triviale des champs (ou conditions initiales) et un ajustement approprié du couplage.

En effet, si on change la normalisation du champ φ en

$$\bar{\varphi} = \sqrt{\eta}\varphi \quad (3.58)$$

alors l'action écrite en (3.1) se réécrit comme suit

$$S[\varphi] = -\eta \int d^4x \left[\frac{1}{2} \varphi_a (\Box_x + M^2) \varphi_a + \frac{\lambda\eta}{4!N} (\varphi_a \varphi_a)^2 \right]. \quad (3.59)$$

Dans le régime où $\gamma \rightarrow 1$, le système se comporte comme un système classique la dynamique reste inchangée par la transformation définie en (3.58) (qui peut être à son tour absorbée par un changement de conditions initiales) à condition de redéfinir le couplage quartique par

$$\lambda_{eff} = \eta\lambda. \quad (3.60)$$

Dans notre cas on attend à ce que l'évolution de la cohérence du système ne dépende pas de γ_0 et λ indépendamment mais uniquement du couplage effectif λ_{eff} tant que le système est fortement cohérent (régime où $\eta \gg 1$).

C'est ce que nous observons sur la figure (3.12) qui montre des simulations avec des γ_0 et λ différents mais à λ_{eff} constant. On note que la dynamique des temps courts ne dépend que du couplage effectif et ce tant que le système reste fortement corrélé. De plus, pour de petites valeurs de λ_{eff} , on peut approcher convenablement le taux de décroissance du paramètre de décohérence γ_k par un développement à petit couplage (courbes où $\lambda_{eff} = 7.22$ et $\lambda_{eff} = 3.0$) ce qui se montre par un redimensionnement du temps en λ_{eff}^2 . On peut également voir cela sur le taux de décroissance de $\gamma_k(t)$ (figure (3.13)).

Cette propriété se retrouve également dans le paramètre $\delta(t)$. Nous pouvons illustrer tout d'abord le fait que la dynamique du retour à l'équilibre du système ne dépend que du couplage effectif λ_{eff} et non des paramètres γ_0 et λ indépendamment.

Sur la figure (3.14) on trace $\delta(t)$ en fonction du temps en unité de la masse initiale (donc sans redimensionnement en $\left(\frac{\lambda_{eff}}{6}\right)^2$) pour les différentes valeurs de $[\gamma_0, \lambda] = [0.99, 3.05]$ (trait plein - rouge), $= [0.95, 6.62]$ (tirets long - vert) où $\lambda_{eff} = 21.7$ et $= [0.95, 2.2]$ (tirets - bleue) où $\lambda_{eff} = 7.22$, $[0.95, 0.915]$ (pointillés - violet) où $\lambda_{eff} = 3.0$. Les courbes rouge et verte se superposent plutôt bien tout au long de la simulation. On peut éventuellement remettre en cause cette affirmation dans les temps plus longs, lorsque $\eta \sim 1$, c'est à dire lorsque $\gamma_k \ll 1$ mais la différence entre les deux courbes reste d'ordre du millièrme. Il est

¹⁴Sous la multiplication par une constante.

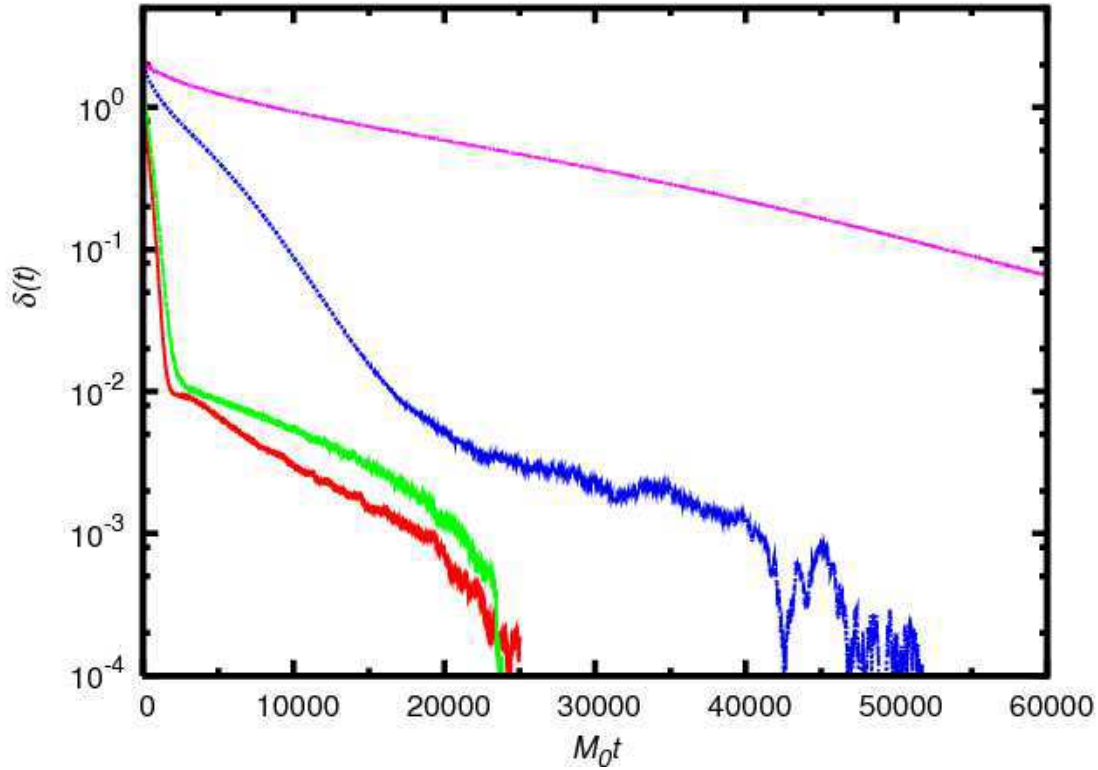


FIG. 3.14 – Le paramètre $\delta(t)$ en fonction du temps (en unité de la masse initiale) pour les couples de paramètres $[\gamma_0, \lambda] = [0.99, 3.05]$ (trait plein - rouge), $= [0.95, 6.62]$ (tirets long - vert) où $\lambda_{eff} = 21.7$ et $= [0.95, 2.2]$ (tirets - bleue) où $\lambda_{eff} = 7.22$, $[0.95, 0.915]$ (pointillés - violet) où $\lambda_{eff} = 3.0$. Les courbes à λ_{eff} identiques (trait plein - rouge et tirets long - vert) montrent la validité de ce scaling même à temps long, indépendamment du rescaling λ_{eff}^2 (courbes tirets - bleue) où $\lambda_{eff} = 7.22$ et (pointillés - violet) où $\lambda_{eff} = 3.0$. Ici a été soustrait la valeur de $\delta(t \rightarrow \infty)$.

indiscutable, que pour des λ_{eff} différents, les courbes ne se superposent plus du tout (bleu et violet).

Sur la figure (3.15) on reproduit la même opération mais en exprimant δ non plus en fonction du temps mais en fonction du temps adimensionné $\tau \equiv \left(\frac{\lambda_{eff}}{6}\right)^2 M_0 t$. Dans cette variable, on observe qu'à temps court (encart) toutes les simulations donnent approximativement le même résultat, tout comme pour $\gamma_k(t)$, suggérant ainsi que la décohérence du système s'effectue exponentiellement vite avec un taux de décroissance qui ne dépend essentiellement que du couplage effectif et semble être perturbatif dans cette variable *i.e.* pour des petites valeur du couplage effectif, le taux de décroissance est proportionnel à λ_{eff}^2 et ceci semble devenir de moins en moins exact au fur et à mesure qu'on augmente λ_{eff} .

Sur cette même figure, on a tracé δ en fonction du temps adimensionné τ , pour les temps plus longs. On remarque que ce qui est vrai pour le développement perturbatif en λ_{eff}^2 à temps court devient franchement faux pour les temps long. Même si la dynamique ne dépend toujours que du couplage effectif sensiblement, à temps long, il n'en est pas pareil

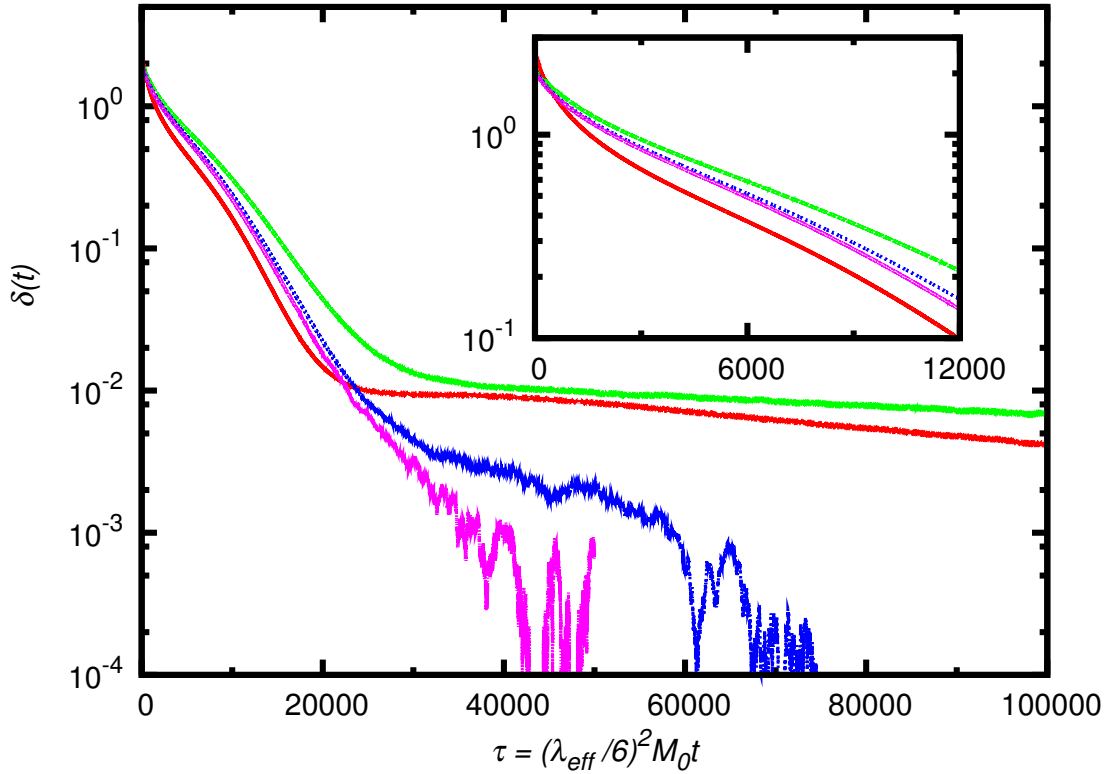


FIG. 3.15 – Le paramètre $\delta(t)$ en fonction du temps adimensionné $\tau \equiv \left(\frac{\lambda_{eff}}{6}\right)^2 M_0 t$ pour les couples de paramètres $[\gamma_0, \lambda] = [0.99, 3.05]$ (trait plein - rouge), $= [0.95, 6.62]$ (tirets long - vert) où $\lambda_{eff} = 21.7$ et $= [0.95, 2.2]$ (tirets - bleue) où $\lambda_{eff} = 7.22$, $[0.95, 0.915]$ (pointillés - violet) où $\lambda_{eff} = 3.0$. Cette figure montre que la réponse à temps court (encart) du système ne dépend pas de la valeur de λ_{eff} mais qu'à temps long, celle-ci est sensiblement différente pour les différentes valeurs. Ceci montre le caractère non perturbatif de la théorie. Ici a été soustrait la valeur de $\delta(t \rightarrow \infty)$.

pour la caractéristique non-perturbative de la théorie. Au fur et à mesure qu'on peuple les modes, la théorie s'écarte du domaine de validité de la théorie des perturbations (même à petit couplage effectif) car la fonction statistique devient¹⁵ $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ et, multiplié par le vertex λ , donne une contribution $\mathcal{O}(1)$ dans l'action effective, ce qui ne permet plus un développement perturbatif en couplage.

Sur cette figure est illustré à la fois le rescaling en λ_{eff} ainsi que celui approximatif en λ_{eff}^2 . Le premier marche aussi bien à temps court qu'à temps long et indépendamment du second, tandis que celui-ci ne marche qu'à temps court et d'autant plus que le couplage effectif est petit.

Une autre façon d'appuyer ce qui est dit dans le paragraphe ci-dessus est d'observer l'évolution de $\text{tr}[D^2(t; k_i)]$ en fonction du temps adimensionné τ pour différents mode et différentes valeurs du couplage effectif.

Pour cela, sur la figure (3.16), on montre que pour les couplages effectifs les plus faibles,

¹⁵Il peut paraître confu de réintroduire λ à ce stade (et non λ_{eff}) mais η étant supérieur à 1 ceci ne change pas le propos de la discussion.

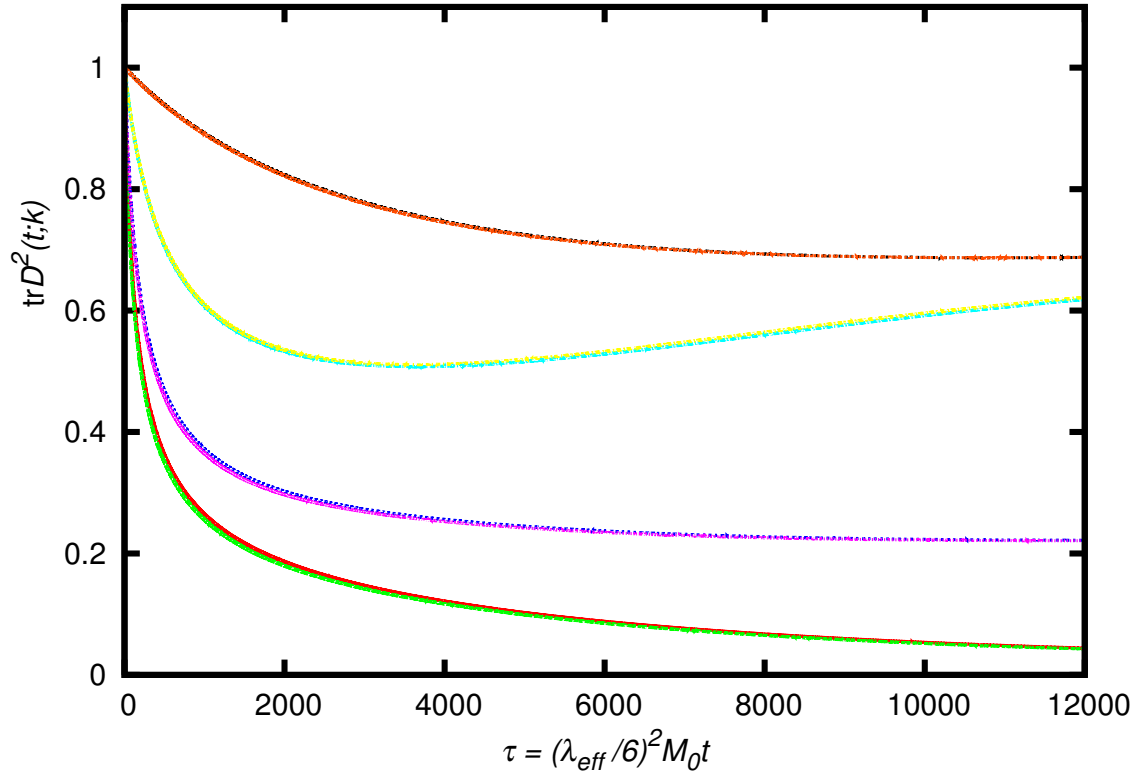


FIG. 3.16 – $\text{tr}[D^2(t; k_i)]$ en fonction du temps adimensionné $\tau \equiv \left(\frac{\lambda_{eff}}{6}\right)^2 M_0 t$ pour $\frac{k_i}{M_0} = 0.16, 1.56, 3.75$ (phase cohérente) et $\frac{k_i}{M_0} = 3.91$ (vide) pour le jeu de paramètre $[\gamma_0, \lambda] = [0.95, 2.2]$ où $\lambda_{eff} = 7.22$, $[0.95, 0.915]$ où $\lambda_{eff} = 3.0$. Pour des petites valeurs de λ_{eff} , le redimensionnement en $\left(\frac{\lambda_{eff}}{6}\right)^2$ est largement satisfaisant.

l'évolution de la pureté de l'état dans cette variable adimensionnée ne dépend pas de la valeur du couplage effectif, quelque soit le mode observé.

A contrario, sur la figure (3.17), on montre que l'évolution de la pureté de l'état, toujours dans la variable τ , commence à ressentir les effets non-perturbatifs de la théorie.

En conclusion, il existe deux physiques intervenant à des temps différents. La première est la physique de la décohérence et de la perte de pureté du système initial. Cette physique manifeste des propriétés remarquables comme une dépendance en un couplage effectif λ_{eff} combinant λ et γ_0 . Ce scaling est le résultat d'un propagateur statistique grand devant celui spectral et donc de la prédominance de la physique classique sur la physique quantique [109]. Le système décohère exponentiellement vite avec un taux de décroissance approximativement proportionnel à λ_{eff}^2 pour des petites valeurs du couplage effectif pointant un développement perturbatif de la théorie. Cependant, pour des valeurs de couplages effectif plus grande et/ou pour des temps plus longs, cette propriété se perd, pointant le caractère non-perturbatif de la théorie.

La deuxième physique est celle de la thermalisation, plus souvent étudiée dans le passé, où ces propriétés de rescaling ne sont plus vérifiées mais le système perd complètement le détail sur les conditions initiales et où la seule quantité pertinente est l'énergie totale car c'est la seule quantité qui se conserve tout au long de l'évolution du système vers son état

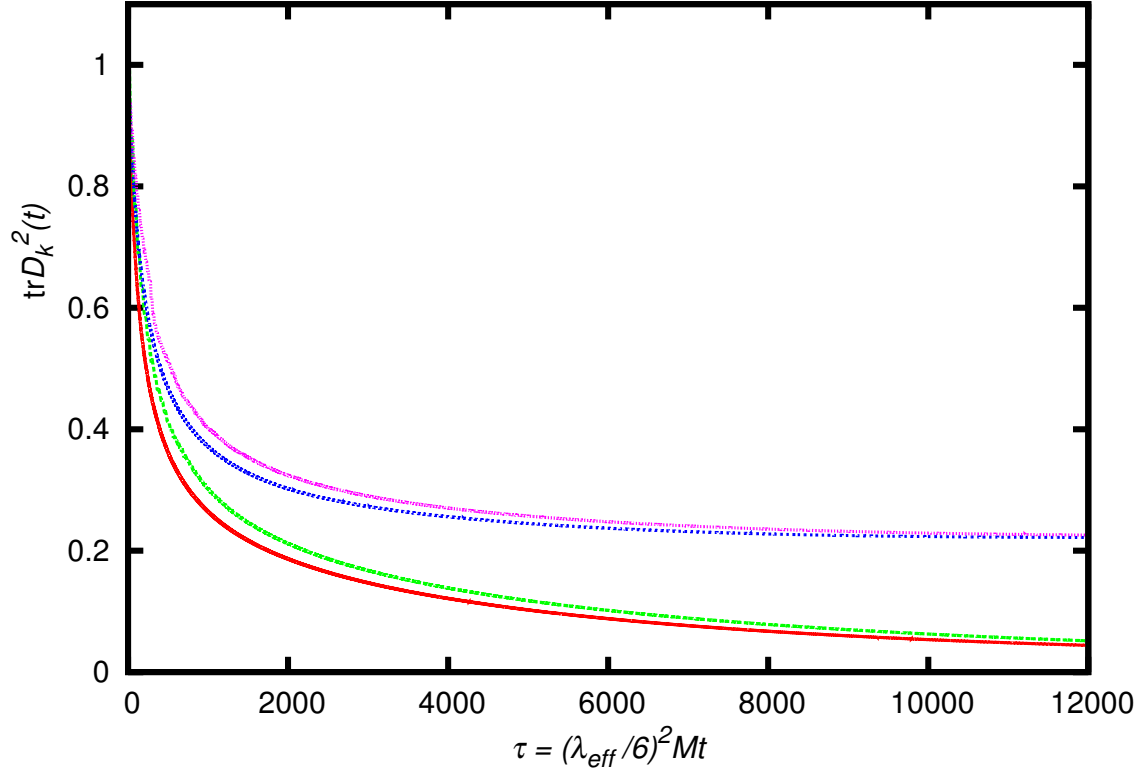


FIG. 3.17 – $\text{tr}[D^2(t; k_i)]$ en fonction du temps adimensionné $\tau \equiv \left(\frac{\lambda_{eff}}{6}\right)^2 M_0 t$ pour $\frac{k_i}{M_0} = 0.16, 1.56$ (phase cohérente) pour le jeu de paramètre $[\gamma_0, \lambda] = [0.95, 2.2]$ (trait plein - rouge) où $\lambda_{eff} = 7.22$, $= [0.95, 6.62]$ (tirets long - vert) où $\lambda_{eff} = 21.7$. Pour des grandes valeurs de λ_{eff} , le redimensionnement en $\left(\frac{\lambda_{eff}}{6}\right)^2$ n'est pas aussi bon que pour la figure (3.16). Les propriétés non-perturbatives de la théorie deviennent visibles.

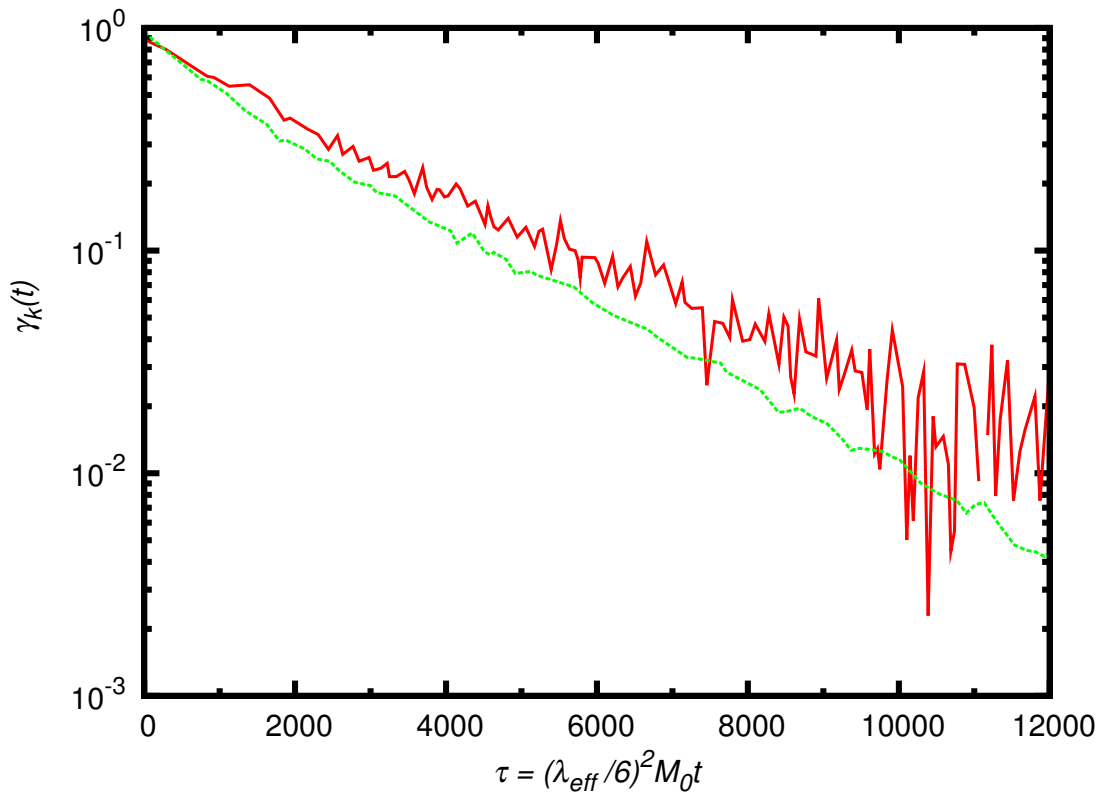


FIG. 3.18 – $\gamma_{k=0.16M_0}(t)$ en fonction du temps adimensionné $\tau \equiv \left(\frac{\lambda_{eff}}{6}\right)^2 M_0 t$ pour $\Lambda = 20M_0$ (trait plein - rouge) et $\Lambda = 10M_0$ (tirets long - vert). La décohérence de ce système est très faiblement perturbée par un doublement de la valeur du cut-off UV.

d'équilibre. L'énergie, à travers sa conservation, intervient à toutes les échelles de temps.

Pour finir, la décohérence et la thermalisation du système sont des phénomènes qui ne peuvent exister sans la présence des intégrales de mémoire du r.h.s. des e.o.m.s, sans lesquelles, le nombre de quasi-particule (et donc $\gamma_k(t)$) deviennent des quantités conservées et où la thermalisation n'a jamais lieu. Ici, comme le condensat n'interagit qu'avec le vide uniquement, ce sont les fluctuations vide qui le font décohérer et thermaliser. Tout ceci ne reste qu'une apparente décohérence dans le sens où la perte d'information du système n'est que le transfert de celui-ci vers les fonctions à trois, quatres... points, non tenues en compte dans nos observables.

Cut-off dépendance

Ici je me propose de vérifier la cut-off indépendance de nos observables qui le sont et de quantifier la dépendance de celles qui ne le sont pas. Ceci est nécessaire étant donné que les équations du mouvement (ainsi que les conditions initiales) ne sont pas renormalisées complètement. Pour cela je varie le cut-off de $\Lambda = 10M_0$ à $\Lambda = 20M_0$. On trouve que les quantités à temps court sont sensiblement cut-off indépendantes alors que les quantités à temps long (température, potentiel chimique...) sont cut-off dépendantes. Pour tous les résultats présentés ici, on a pris $[\gamma_0, \lambda] = [0.99, 3.05]$ où $\lambda_{eff} = 21.7$.

La figure (3.20) montre la dépendance en Λ de l'évolution de la température (au sens explicité plus haut). On remarque nettement que celle-ci dépend fortement du cut-off.

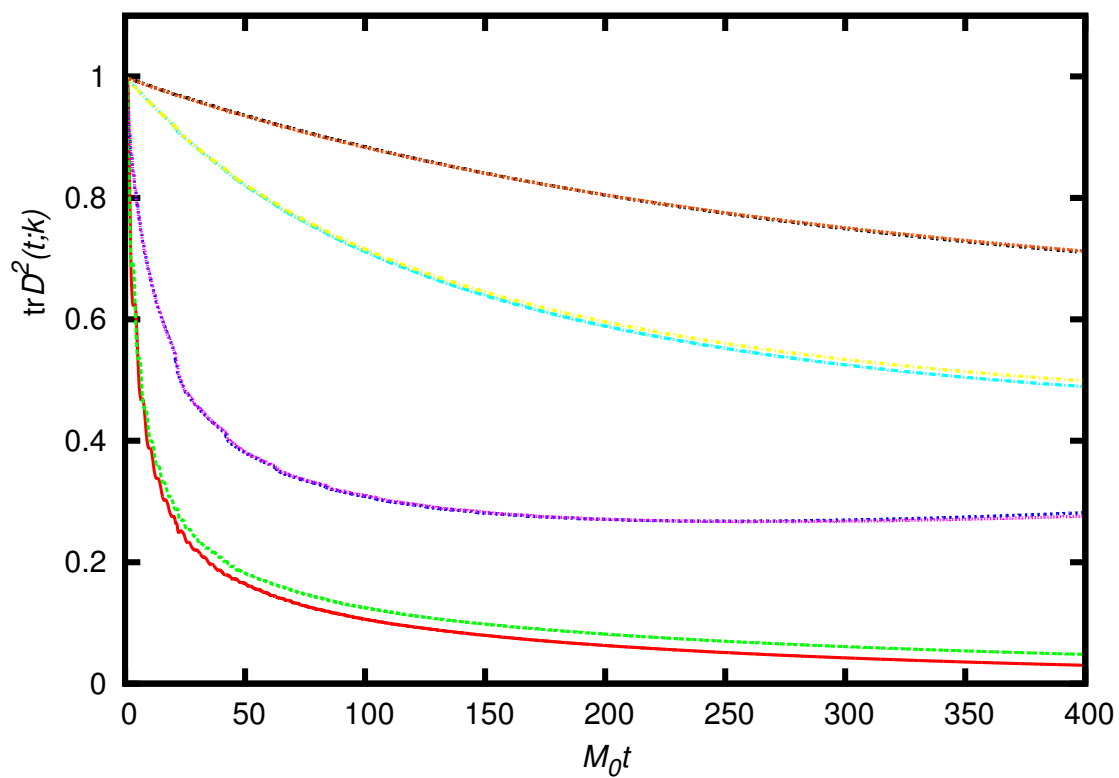


FIG. 3.19 – $\text{tr} [D^2(t; k_i)]$ pour $\frac{k_i}{M_0} = 0.16, 3.75$ (condensat) et $\frac{k_i}{M_0} = 3.91, 4.69$ (vide), montre être très insensible à la variation du cut-off d'un facteur deux.

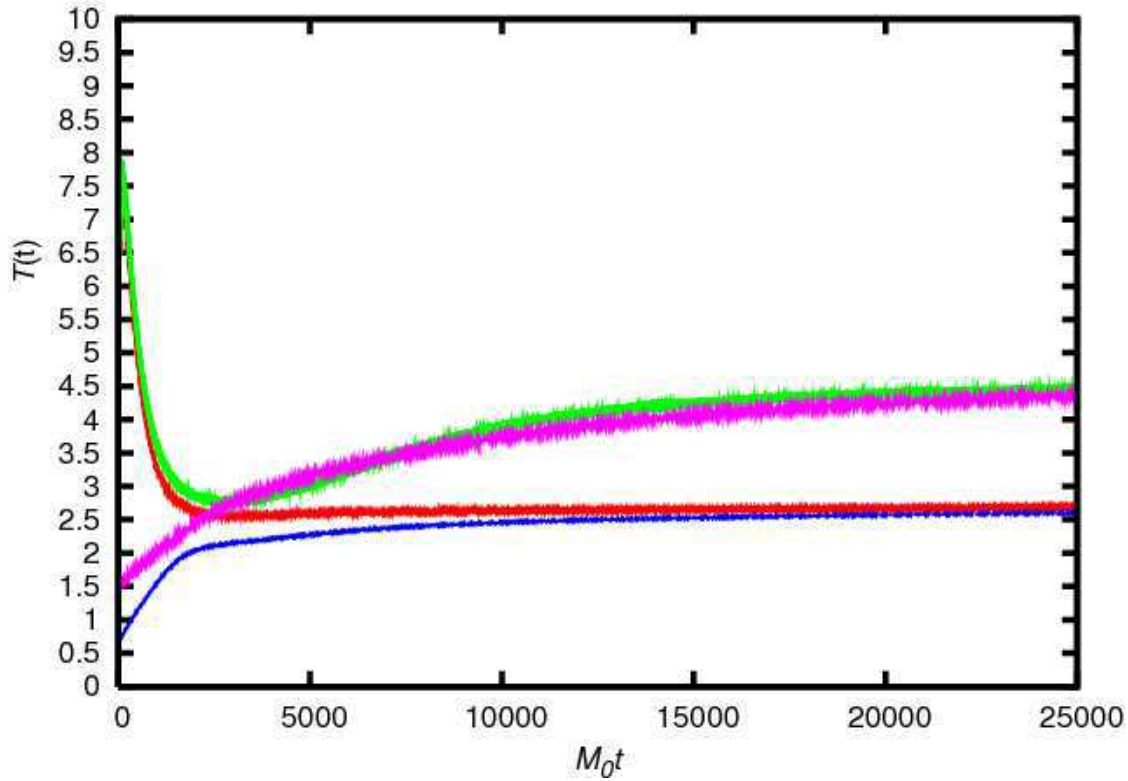


FIG. 3.20 – Evolution de la température du condensat pour $\Lambda = 10M_0$ (trait plein - rouge) et $\Lambda = 20M_0$ (tirets longs - vert) et celle du vide pour $\Lambda = 10M_0$ (tirets - bleue) et $\Lambda = 20M_0$ (pointillés - violet). Celle-ci dépend fortement de Λ mais dans les deux cas le système finit par atteindre son équilibre cinétique.

Néanmoins, à temps court, cette dépendance est peu appréciable dans le condensat, contrairement au vide. Par construction de nos états initiaux, c'est le vide qui contient la physique UV. On voit que l'écart entre les courbes de température du condensat pour les différents cut-off est principalement dû à l'influence du vide.

On peut répéter cette analyse pour la figure (3.21) qui montre la dépendance en Λ de l'évolution du potentiel chimique (au sens explicité plus haut). Les conclusions sont les mêmes que pour la température, à savoir, au temps court, le potentiel chimique du condensat semble sensiblement cut-off indépendant contrairement à celui du vide. Ce dernier est responsable de la dépendance en cut-off que manifeste la courbe du potentiel chimique du condensat à temps long.

En conclusion de cette étude on peut dire que la physique à temps court, principalement menée par la décohérence et la perte de pureté du système, est, à une très bonne approximation, cut-off indépendante, dans la gamme étudiée, malgré la renormalisation quadratique sommaire de la théorie. La physique à temps long, menée par la thermalisation du système et du retour à son équilibre, manifeste une forte cut-off dépendance dans les valeurs numériques mesurées mais son retour à l'équilibre n'est pas remis en question. On peut donc utiliser cette théorie comme prédictive en prenant soin de préciser à quel cut-off UV on travaille quand il s'agit de discuter la physique au temps long. Dans toute cette étude où le condensat est dans le vide, et où la décohérence et la thermalisation s'effectue par interaction avec les fluctuations du vide, le cut-off UV sera fixé à $\Lambda = 10M_0$.

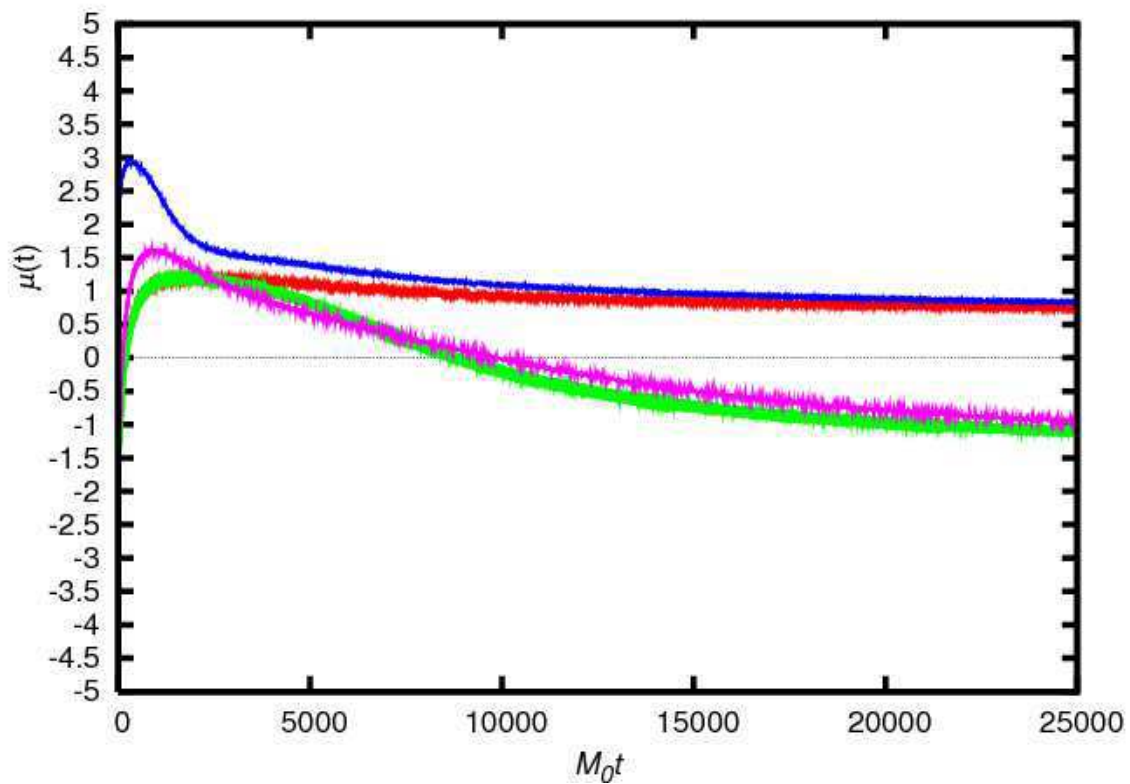


FIG. 3.21 – Evolution du potentiel chimique du condensat pour $\Lambda = 10M_0$ (trait plein - rouge) et $\Lambda = 20M_0$ (tirets longs - vert) et celui du vide pour $\Lambda = 10M_0$ (tirets - bleue) et $\Lambda = 20M_0$ (pointillés - violet). Celui-ci dépend fortement de Λ mais dans les deux cas le système finit par atteindre son équilibre chimique.

Variation de la phase $\phi_k(t)$

Dans cette section, je propose d'explorer d'autres valeurs de la phase initiale $\phi_k(0)$. On s'attend à ce que le comportement du système ne soit pas significativement modifié. Il faut se souvenir que pour $\phi_k(0) = \pm \frac{\pi}{2}$ alors les deux propagateurs F et K sont du même ordre de grandeur $\mathcal{O}(\eta)$ ce qui est particulièrement confortable pour le traitement numérique. A l'inverse, lorsque que $\phi_k(0) \neq \pm \frac{\pi}{2}$, l'un des deux propagateurs F ou K devient grand par rapport à l'autre (dans nos conditions d'utilisation $\gamma_0 \rightarrow 1$) ce qui peut avoir une conséquence pour la stabilité numérique de nos simulations. C'est essentiellement pour cette raison que toute l'analyse de la décohérence et thermalisation de notre système a été faite avec $\phi_k(0) = -\frac{\pi}{2}$, sachant que cette phase ne joue aucun rôle dans la dynamique du problème exceptés ceux d'ordre numérique.

Nous allons voir tout d'abord comment la variation de $\phi_k(0)$ influe sur le paramètre de décohérence $\gamma_k(t)$, puis nous verrons que cette rotation de Bogolubov ne change pas le propos du scaling classique en λ_{eff} ni celui perturbatif¹⁶ en λ_{eff}^2 .

Sur la figure (3.22) on trace l'évolution du paramètre de décohérence $\gamma_k(t)$ pour différentes valeurs de la phase initiale du condensat. Pour des valeurs comprises dans l'intervalle $[-\pi; -\frac{\pi}{2}]$, le taux de décohérence du système varie assez peu alors que pour des valeurs comprises dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; 0]$ celui-ci semble en dépendre plus significativement.

Sur la figure (3.23) on trace l'évolution du paramètre de décohérence $\gamma_k(t)$ pour différentes valeurs du couple $[\gamma_0, \lambda]$ (mais à λ_{eff} égaux) en prenant $\phi_k(0) = -\pi$ pour s'assurer que cette phase ne modifie pas la discussion du rescaling par le couplage effectif et la classicalité de la théorie. Malgré l'écart que présente les deux courbes, on peut admettre que le scaling classique est conservé par rotation de la phase initiale. Cet écart peut, là encore, s'expliquer par un traitement numérique délicat aux temps initiaux, provoquant une petite erreur sur la pente de la courbe rouge par rapport à la courbe verte.

Sur la figure (3.24) on trace l'évolution du paramètre de décohérence $\gamma_k(t)$ pour différentes valeurs du couple $[\gamma_0, \lambda]$ en prenant $\phi_k(0) = -\frac{3\pi}{4}$, testant le scaling classique du couplage effectif ainsi que le développement perturbatif en couplage effectif à une variation de la phase initiale. Ce cas intermédiaire entre le précédent ($\phi_k(0) = -\pi$) et le cas habituel ($\phi_k(0) = -\frac{\pi}{2}$) permet d'obtenir des simulations plus stable numériquement tout en explorant la région $\phi_k(0) < -\frac{\pi}{2}$.

Sur cette figure on en tire principalement deux leçons. Premièrement le scaling en couplage effectif résiste à la variation de phase et que l'écart entre les deux courbes de la figure (3.23) est très probablement dû au traitement numérique. Deuxièmement, le scaling perturbatif en λ_{eff}^2 est très bien reproduit pour les petites valeurs du couplage effectif, et moins bien pour de plus grandes valeurs, laissant apparaître les effets non-perturbatifs de la théorie. Si ceux-ci se manifestent plus amplement dans le cas $\phi_k(0) = -\frac{3\pi}{4}$ que dans celui $\phi_k(0) = -\frac{\pi}{2}$ c'est probablement dû, une fois de plus, à l'amplification des différences au temps initial par le fait que F et K ne sont plus du même ordre de grandeur.

¹⁶Qui, rappelons le, est approximatif et valable quand le couplage effectif reste petit.

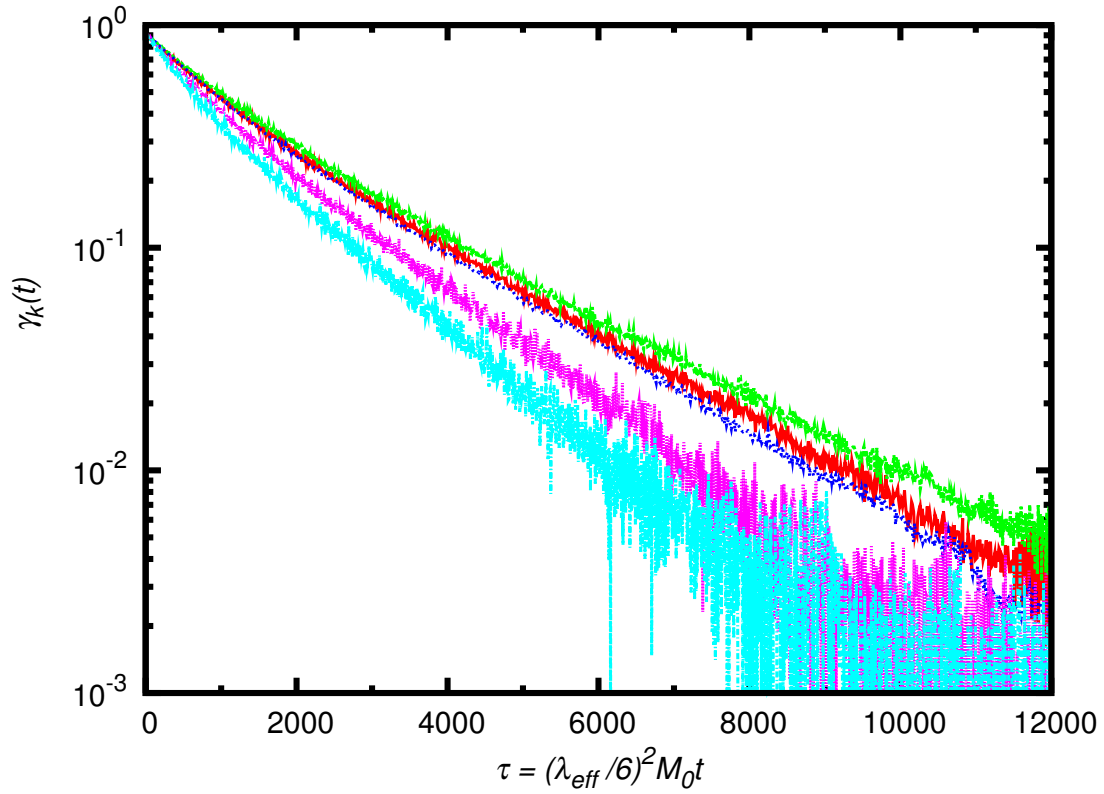


FIG. 3.22 – Evolution de $\gamma_{k=0.16M_0}(t)$ en fonction du temps adimensionné $\tau \equiv \left(\frac{\lambda_{eff}}{6}\right)^2 M_0 t$ avec $[\gamma_0, \lambda] = [0.95, 2.2]$ où $\lambda_{eff} = 7.22$ (couplage effectif faible) pour $\phi_k(0) = -\pi$ (trait plein - rouge), $\phi_k(0) = -\frac{3\pi}{4}$ (tirets longs - vert), $\phi_k(0) = -\frac{\pi}{2}$ (tirets - bleu foncé), $\phi_k(0) = -\frac{\pi}{4}$ (pointillé - violet) et $\phi_k(0) = 0$ (point-tiret - bleu cyan). Pour les trois premières valeurs de $\phi_k(0)$ le système décohère sensiblement avec le même taux. Pour les deux valeurs situées dans le quadrant $[-\frac{\pi}{2}; 0]$ la phase initiale du condensat semble jouer un rôle sur son taux de décohérence.

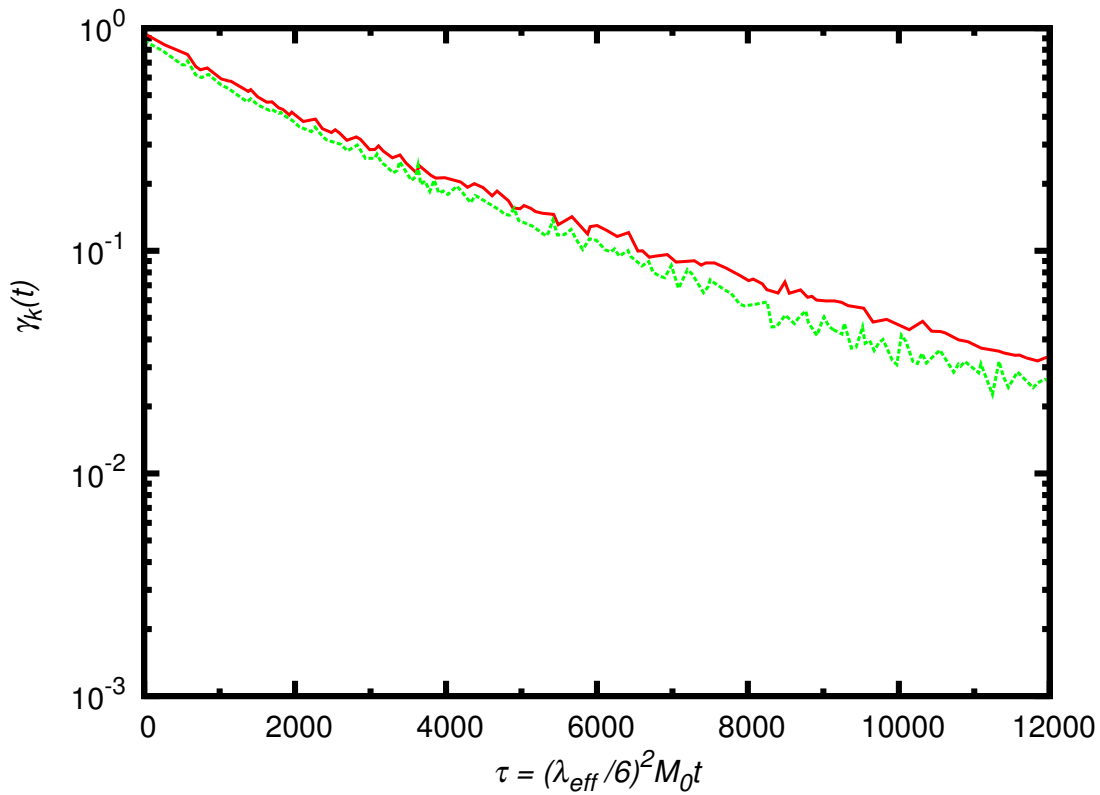


FIG. 3.23 – Ce graphique montre l'évolution de $\gamma_{k=0.16M_0}(t)$ en fonction du temps adimensionné $\tau \equiv \left(\frac{\lambda_{eff}}{6}\right)^2 M_0 t$ avec $\phi_k(0) = -\pi$ pour $[\gamma_0, \lambda] = [0.99, 3.05]$ (trait plein - rouge), $= [0.95, 6.62]$ (tirets long - vert) où $\lambda_{eff} = 21.7$. La variation de la condition initiale par la phase ne remet pas en cause le scaling classique en λ_{eff} .

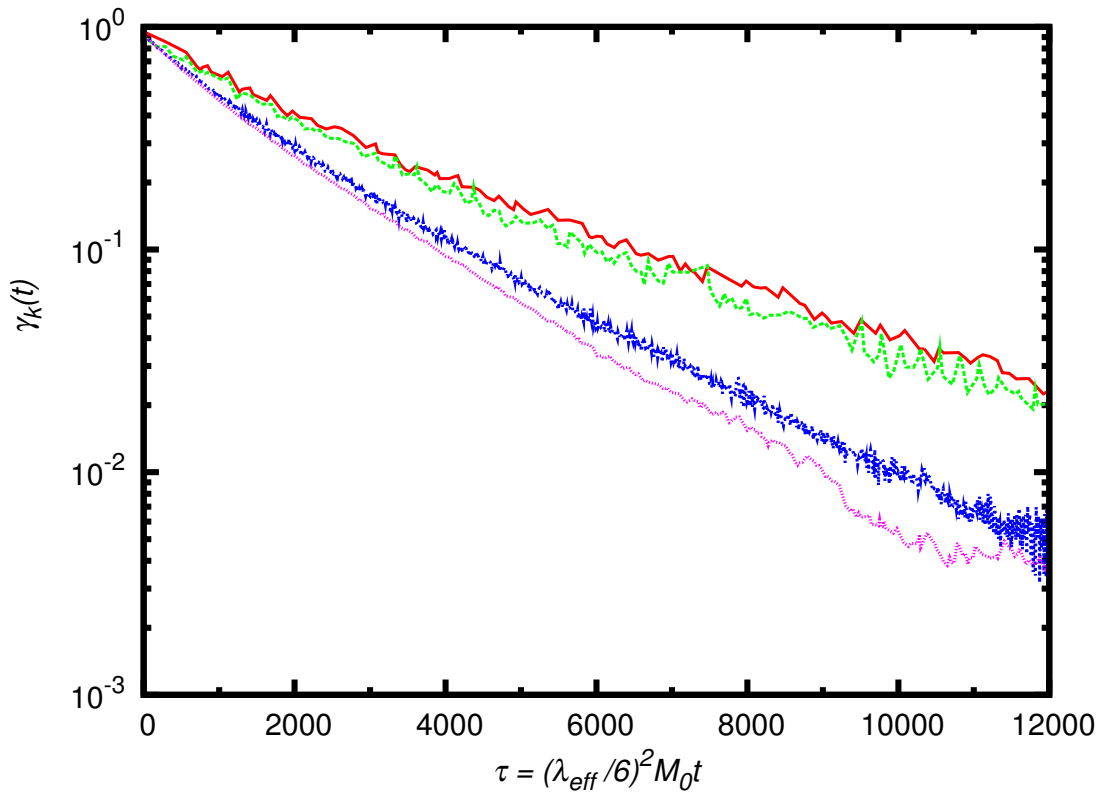


FIG. 3.24 – Evolution de $\gamma_{k=0.16M_0}(t)$ en fonction du temps adimensionné $\tau \equiv \left(\frac{\lambda_{eff}}{6}\right)^2 M_0 t$ avec $\phi_k(0) = -\frac{3\pi}{4}$ pour $[\gamma_0, \lambda] = [0.99, 3.05]$ (trait plein - rouge), $= [0.95, 6.62]$ (tirets long - vert) où $\lambda_{eff} = 21.7$ et $= [0.95, 2.2]$ (tirets - bleue) où $\lambda_{eff} = 7.22$, $[0.95, 0.915]$ (pointillés - violet) où $\lambda_{eff} = 3.0$. La variation de la condition initiale de la phase conserve le scaling classique en λ_{eff} . Le scaling perturbatif semble montrer ses limites (courbes bleue et violette).

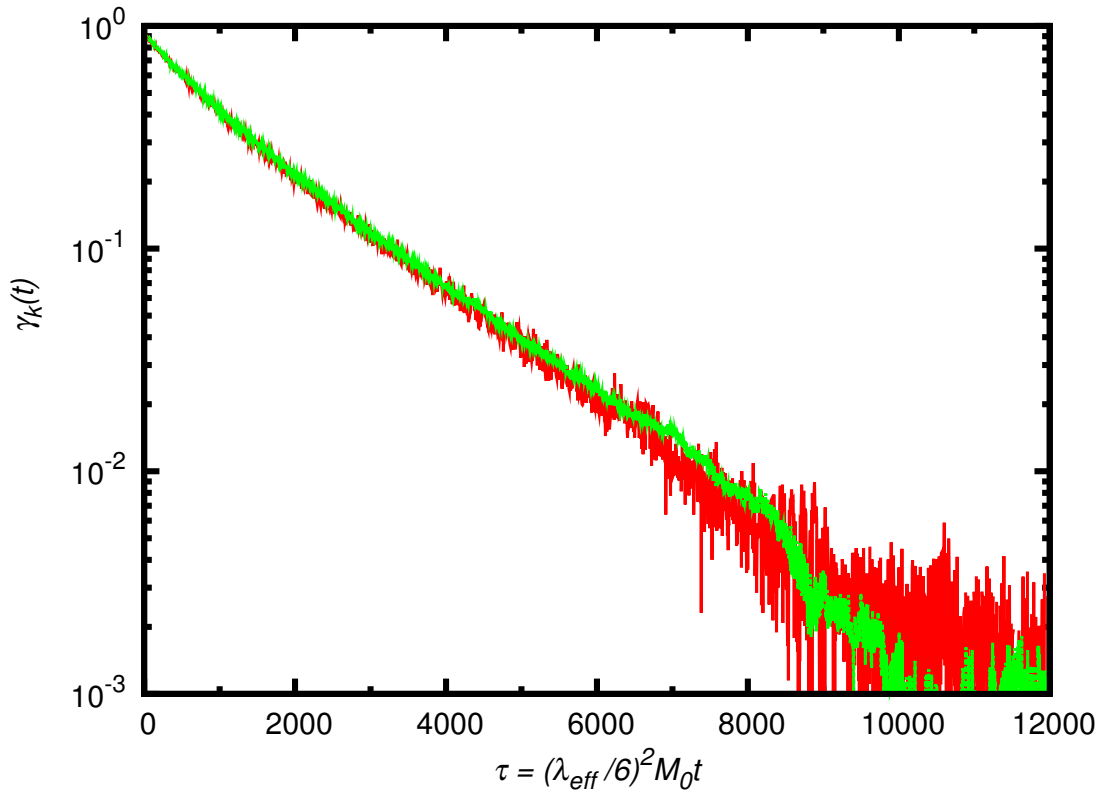


FIG. 3.25 – Evolution de $\gamma_{k=0.16M_0}(t)$ en fonction du temps adimensionné $\tau \equiv \left(\frac{\lambda_{eff}}{6}\right)^2 M_0 t$ avec $\phi_k(0) = -\frac{\pi}{4}$ pour $[\gamma_0, \lambda] = [0.95, 2.2]$ (trait plein - rouge) où $\lambda_{eff} = 7.22$, $= [0.95, 0.915]$ (tirets long - vert) où $\lambda_{eff} = 3.0$. La variation de la condition initiale de la phase semble conserver le scaling perturbatif.

Sur la figure (3.24) on trace l'évolution du paramètre de décohérence $\gamma_k(t)$ pour différentes valeurs du couple $[\gamma_0, \lambda]$ (à λ_{eff} égaux) en prenant $\phi_k(0) = -\frac{\pi}{4}$, revenant ainsi dans le quadrant où $-\frac{\pi}{2} < \phi_k(0) < 0$. Cette valeur de la phase nous permet de se convaincre que dans ce quadrant, les simulations numériques semblent plus stables et le scaling classique ainsi que le scaling perturbatif sont mieux respectés par les équations discrétisées. Ceci justifie donc le fait de choisir un $\phi_k(0) = -\frac{\pi}{2}$ pour nos simulations d'analyses physique.

En conclusion à ce paragraphe, la valeur de la phase ϕ_k ne modifie pas sensiblement la dynamique de la décohérence de notre système. Cependant le choix de $\phi_k(0) = -\frac{\pi}{2}$ semble être le plus approprié pour le traitement numérique des e.o.m. donnant aux propagateurs F et K une valeur initiale du même ordre de grandeur $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\gamma_0^2}}\right)$.

Ici nous n'avons vu que la dynamique à temps court, la décohérence, dépend de la phase initiale du condensat. Cependant celle à temps long ne doit absolument pas en être perturbée étant donné que $\phi_k(0)$ n'entre pas dans l'estimation de l'énergie totale du système, seule quantité initialement définie capable d'influencer le système dans son choix d'état final.

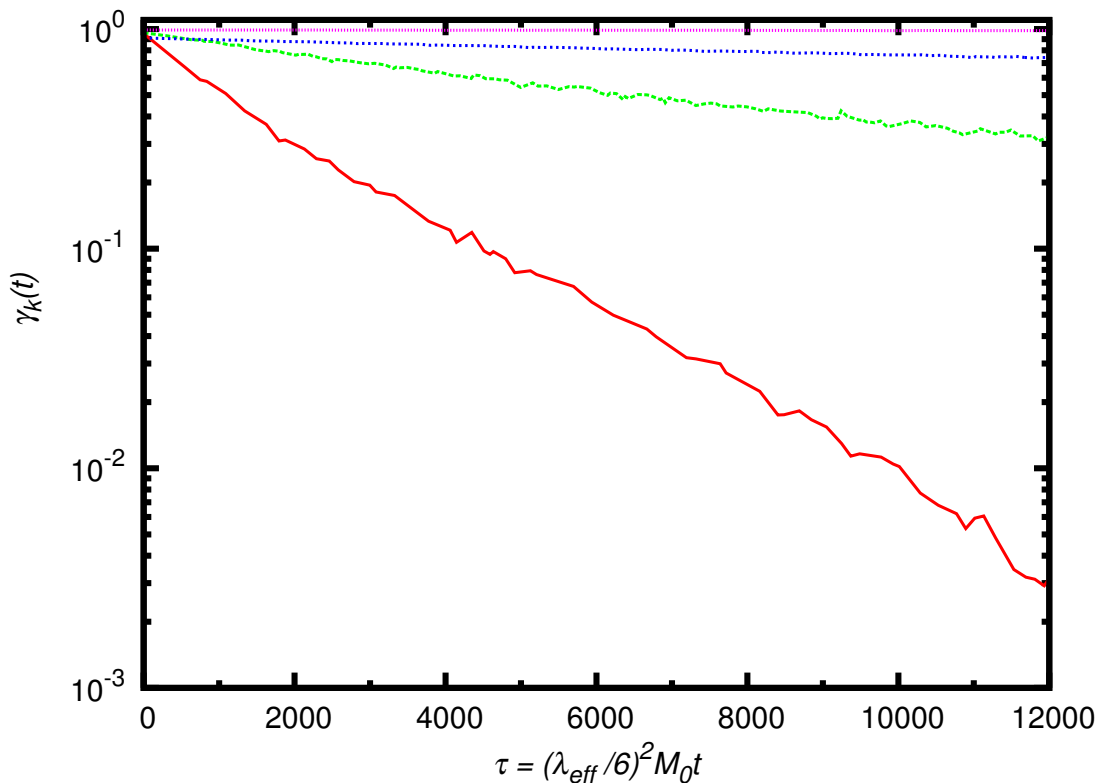


FIG. 3.26 – Evolution du paramètre $\gamma_k(t)$ en fonction du temps adimensionné $\tau \equiv \left(\frac{\lambda_{eff}}{6}\right)^2 M_0 t$ pour des conditions initiales telles que $k_c = 3.91M_0$ (trait plein - rouge), $k_c = 2.03M_0$ (tirets longs - vert), $k_c = 1.09M_0$ (tirets - bleu), $k_c = 0.47M_0$ (pointillés - violet). La valeur de k_c contrôle le taux de décroissance de ce paramètre tel qu'il croît quand le rapport augmente. Quand ce dernier est inférieur à 1, le système ne décohère plus du tout.

Variation de la "taille" du condensat

Dans cette section, on propose de varier la "taille" du condensat en jouant avec k_c et d'observer comment la dynamique de la décohérence et de la thermalisation en est perturbée. On s'attend à ce que l'évolution en temps ralentisse pour des k_c de plus en plus petits puisque l'énergie du système est de plus en plus petite. Pour les simulations à suivre, on se donne les conditions initiales suivantes $\gamma_0 = 0.99$, $\phi_k(0) = -\frac{\pi}{2}$, $M_0\beta_{co} = 64.11$ et $\lambda = 3.05$.

Nous nous intéresserons aux trois concepts les plus importants de cette étude, à savoir, la décohérence et la perte de pureté, appartenant tous deux à la physique des temps courts, et la thermalisation appartenant à la physique des temps longs.

Sur la figure (3.26) on trace l'évolution de $\gamma_k(t)$ pour différentes valeurs de k_c . On voit sur cette figure que le taux de décroissance de $\gamma_k(t)$ est directement lié à la "taille" du condensat, déterminée par k_c . Pour un système initialisé avec un rapport $\frac{k_c}{M_0} < 1$ le système ne décohère plus. En effet, l'énergie du système est concentrée sur des modes inférieurs à la première excitation du système qui est la masse ce qui rend très difficile la production

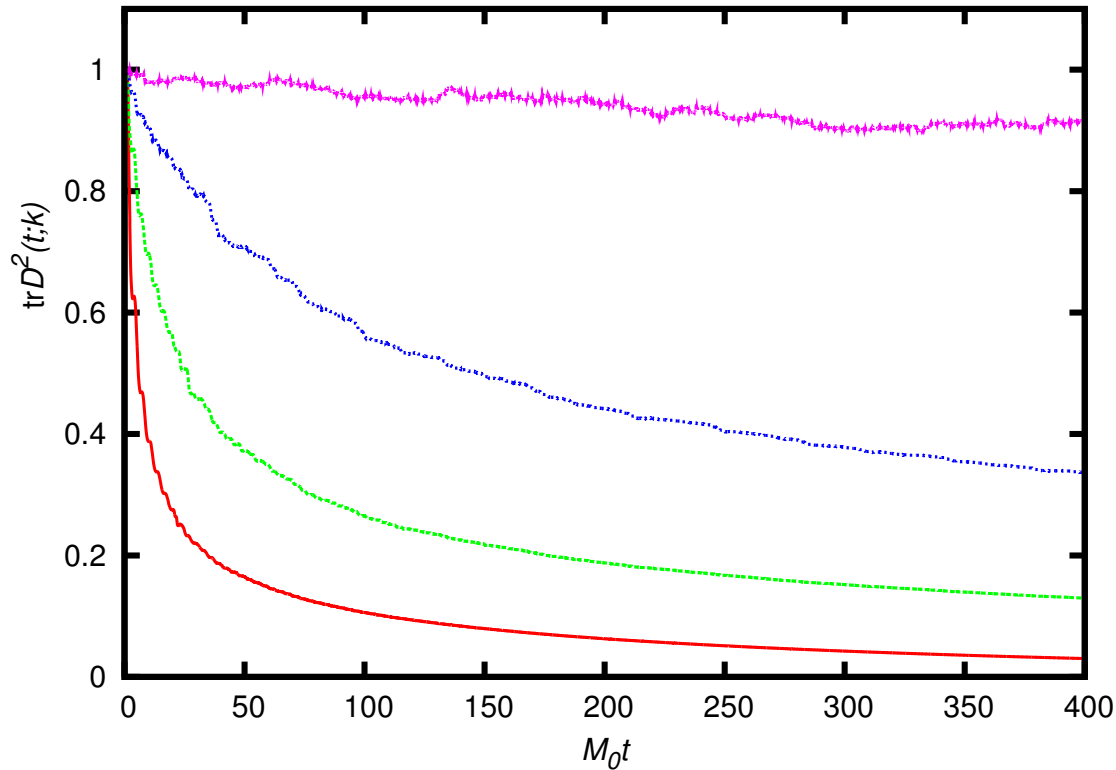


FIG. 3.27 – Evolution de $\text{tr} [D^2(t; k = 0.16M_0)]$ en fonction du temps en unité de masse pour des conditions initiales telles que $k_c = 3.91M_0$ (trait plein - rouge), $k_c = 2.03M_0$ (tirets longs - vert), $k_c = 1.09M_0$ (tirets - bleu), $k_c = 0.47M_0$ (pointillés - violet). Comme pour la décohérence, k_c contrôle la décroissance de la pureté de l'état initial. Quand $k_c < M_0$, l'état initial reste pur.

de quasi-particules et par conséquent la décohérence du système¹⁷.

Sur la figure (3.27) on montre l'évolution de $\text{tr} [D^2(t; k)]$ pour différentes valeurs de k_c , du mode de plus basse énergie. Comme pour la décohérence, on observe un net ralentissement de la perte de pureté du système en diminuant la valeur de k_c . A son extrême, quand $k_c < M_0$, le système reste pur. Une fois de plus on peut expliquer par l'énergie totale du système, intimement liée à k_c , qui n'est pas suffisante pour exciter l'état de plus basse énergie, qui est la masse.

Sur la figure (3.28) on montre l'évolution du paramètre $\delta(t)$ pour différentes valeurs de k_c . Ce paramètre est un indicateur de l'évolution du système vers son état d'équilibre, et est donc une sonde pour la physique aux temps long. Ici on voit que le retour à l'équilibre du système est fortement ralenti en diminuant la valeur de k_c , tout comme la physique à temps court. Cette remarque renforce l'hypothèse que l'énergie totale du système entre en jeu dans l'échelle de temps de la décohérence et de la thermalisation étant donné qu'elle est la seule quantité capable de traverser toute les échelles de temps de la dynamique du retour à l'équilibre d'un système initialement hors-équilibre. On peut interpréter cela comme le fait que plus l'énergie est élevée, plus le système est loin de son équilibre (donc plus excité) et

¹⁷Rappelons que l'une des caractéristiques de la décohérence c'est d'être impossible dans les approximations de type champs-moyen (sans collisions entre les particules) tel qu'est formulé notre problème. Cette approximation est caractérisée, entre autre, pour laisser invariant le nombre de quasi-particules.

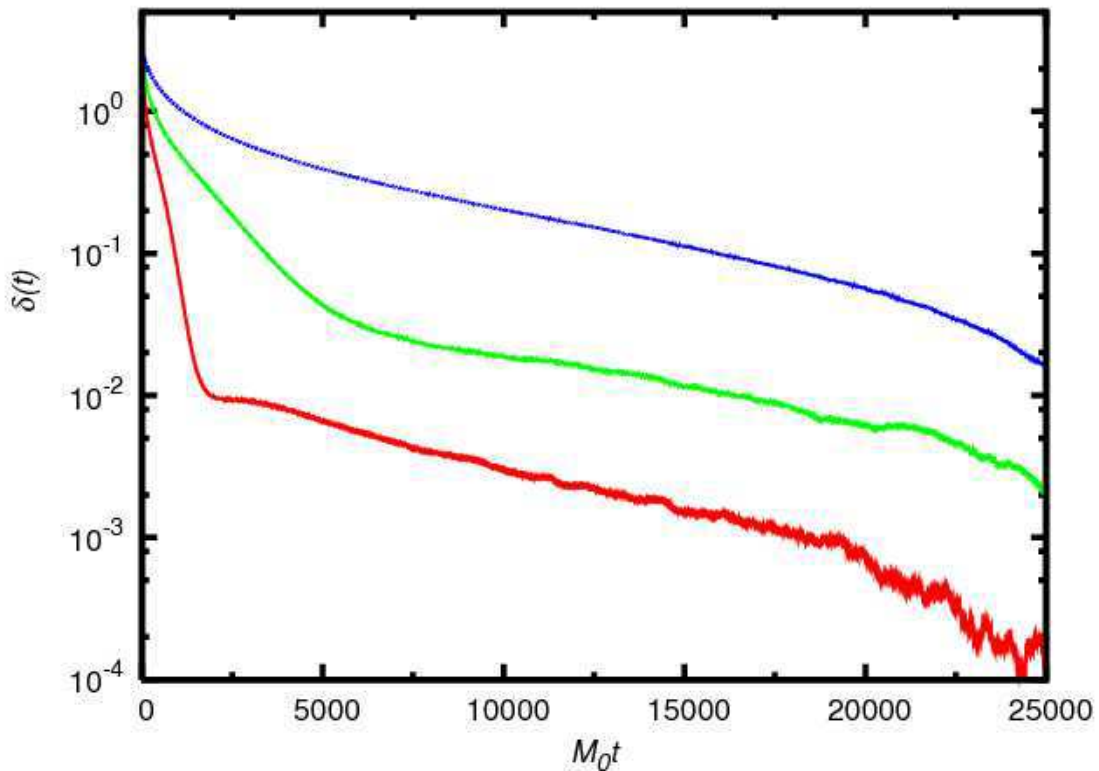


FIG. 3.28 – Evolution du paramètre $\delta(t)$ en fonction du temps en unité de masse pour des conditions initiales telles que $k_c = 3.91M_0$ (trait plein - rouge), $k_c = 2.03M_0$ (tirets longs - vert), $k_c = 1.09M_0$ (tirets - bleu). Ici la constante, proportionnelle à la température finale, a été soustraite pour mettre en évidence le caractère exponentiel de l'évolution de ce paramètre très net à grand k_c et bien moins pour des k_c de l'ordre de la masse initiale.

il aura donc tendance à revenir à son équilibre plus rapidement.

En conclusion à cette étude, on peut garder que la "taille" du condensat est un paramètre dont en dépend fortement l'énergie totale du système. Il influence la physique à temps long et celle à temps court de manière à ralentir son retour à l'équilibre (décohérence puis équilibration cinétique et chimique) au fur et à mesure qu'il diminue. Il est donc vraisemblable que ce paramètre ait un rôle majeur à jouer dans les taux de décroissance et retour à l'équilibre du système. Afin d'explorer cela il faudrait par exemple regarder ce que répond le système pour plusieurs k_c mais en gardant l'énergie initiale constante, en jouant sur d'autres paramètres comme γ_0 ou β_{co} .

Cette première étude du condensat plongé dans le vide nous montre que l'approche utilisée est particulièrement adaptée à l'étude de ce genre de système. Elle a également permis de mettre en évidence que la décohérence du système obéissait une loi de décroissance exponentielle dont le taux ne dépend que du couplage effectif défini en (3.60) si l'état initial est suffisamment cohérent pour que les fonctions spectrales (portant l'information de la mécanique quantique) soient négligeables devant les fonctions statistiques. Parallèlement nous retrouvons que le développement perturbatif reprend sa validité uniquement à faible valeur de ce couplage effectif.

Il a été pointé que dans un certain intervalle de valeurs de la phase initiale $\phi_k(0)$ du condensat, le système décohère sensiblement de la même façon. Cependant pour des valeurs comprises dans le quadrant bas-droite du cercle trigonométrique, le taux de décohérence dépend de ce paramètre. Néanmoins, la discussion du scaling classique et perturbatif n'est pas modifiée par cette observation outre des questions de stabilité numérique dû au produit d'un propagateur initialement grand avec un propagateur initialement petit.

Finalement, on a testé le comportement du système face à un changement de la "taille" du condensat. Il a été montré que plus la valeur de k_c est grande et plus le système décohère et thermalise vite. Ceci laisse à penser que la coupure, séparant le condensat du vide, entre en jeux dans l'établissement du taux de décohérence du système, tout comme le couplage effectif, qui doit être proportionnel à son carré, en première approximation.

Au cours de cette étude, on a considéré un ensemble thermique à température nulle pour simuler le vide. On s'attend à ce que la dynamique du retour à l'équilibre du condensat en soit fortement modifiée si cet ensemble thermique a une température finie. S'ajoute alors aux fluctuations propres du condensat, les collisions de particules venant du bain thermique laissant croire à une décohérence et une thermalisation plus rapide. Ceci est l'objet de l'étude suivante dans laquelle le condensat est également initialisé dans un vide cohérent (donc un état excité sans particules) mais où le bain thermique est initialisé avec un grand nombre de particules thermiquement distribuées (température finie).

Conclusions

Dans ce chapitre nous avons étudié la décohérence d'un état pur et la thermalisation en théorie quantique des champs mettant en oeuvre le modèle $O(N)$ dans un potentiel quartique avec une valeur moyenne dans le vide nulle. Pour cela nous avons utilisé les techniques habituelles d'action effective $2PI$ [56, 57, 58, 59, 60, 110, 44, 45] pour établir les équations du mouvement régissant la dynamique du retour à l'équilibre (thermalisation) du système. L'originalité de ce chapitre a été de faire le lien entre le formalisme des fonctions spectrales/statistiques et la notion de cohérence et de pureté d'un système même si l'application de ce type de système à la théorie des champs est antérieure [103, 12, 13, 54]. L'analyse est basée sur l'idée que la perte d'information sur la cohérence du système est due aux non gaussianités que développe la dynamique du système. Les travaux précédents concernant la décohérence ont essentiellement utilisé des techniques d'intégration des degrés de liberté extérieurs dans une dynamique effective [99, 100, 101]. Un travail [55] approchant plus la méthode employée dans cette thèse a récemment été soumis à publication. Dans cette approche, nous décrivons microscopiquement les interactions entre le sous-système dit "condensat" et l'environnement extérieur qu'il soit le vide ou un bain thermique.

Dans une première étude nous avons placé le "condensat" (un sous-système de modes inférieurs à une coupure k_c), initialisé dans un état excité du vide (état cohérent), dans le vide de la théorie (modes supérieurs à la coupure, thermique et sans particules).

La physique qui gouverne l'évolution temporelle de ce condensat a deux échelles de temps. La première est une échelle courte pendant laquelle le système décohère, grâce à ses propres fluctuations, et perd sa pureté initiale atteignant rapidement un état mixte décohéré hors-équilibre. Ce point peut être vu comme une condition initiale pour la physique de la thermalisation dont l'échelle de temps pour sa mise en place est bien plus grande que celle pour la décohérence.

Comme il a été pointé sur l'article [111], une redéfinition appropriée du couplage et des conditions initiales du champ φ_k (autrement dit du propagateur spectral) fait ressortir, dans la limite d'un état initialement extrêmement cohérent, une dynamique classique modélisable en théorie statistique des champs et simulable avec des techniques type montecarlo [45]. En considérant un couplage effectif inversement proportionnel à $\sqrt{1 - \gamma_0^2}$, on vérifie que les courbes à couplages effectifs constants se superposent, après redimensionnement du temps. Dans cette nouvelle variable, on obtient une dynamique indépendante de γ_0 et λ indépendamment mais uniquement de la combinaisons de ces deux constantes.

Pour des petites valeurs du couplage effectif, on s'attend à ce que la dynamique du système soit proportionnelle au carré de ce couplage effectif comme tout développement perturbatif. Ceci se vérifie très bien pour la dynamique à temps court. Au fur et à mesure que le système avance vers son état d'équilibre, on peuple les niveaux d'énergie et le propagateur statistique devient au plus d'ordre $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ ce qui rend la théorie non-perturbative. Pour des valeurs plus grandes de λ_{eff} , le scaling en λ_{eff}^2 perd de sa validité ce qui pointe le caractère non perturbatif de notre développement.

Comme attendu avec l'utilisation de l'action effective $2PI$, l'état d'équilibre atteint par le système est universel dans le sens qu'il ne dépend absolument pas des détails sur les conditions initiales mais uniquement de l'énergie totale initialement introduite. A l'équilibre nous obtenons une distribution de Bose-Einstein définissant une température.

La théorie employée a été renormalisée uniquement via une redéfinition de la masse

initiale. Malgré cette renormalisation sommaire, il a été testé qu'une multiplication par deux du cut-off UV ne change pas les propos concernant la physique à temps. Celle à temps long est fortement modifiée [76] et une renormalisation complète de notre théorie *2PI Next-to-Leading Order* demande un accroissement de travail non nécessaire pour le moment. On peut s'inspirer des travaux [112] pour renormaliser complètement cette théorie, en tenant compte du problème à valeurs initiales [113].

La présence d'un bain thermique à température non nulle en condition initiale est en cours d'étude.

Conclusions et perspectives

Dans ce travail nous nous sommes concentrés sur deux parmi tant d'autre des phénomènes hors-équilibre de l'Univers inflationnaire : le *reheating*, aussi bien bosonique que fermionique, et la décohérence d'un état pur. Leur compréhension détaillée nécessite un traitement quantique non-perturbatif de leur dynamique. Les modèles étudiés ici ont tous été développés à grand nombre de champs (développement non-perturbatif) au premier ordre laissant apparaître une *self-energy* non locale, traduisant les effets nécessaires de collisions, de mémoire et hors couche de masse. Dans le domaine du *reheating* nous voulions étudier ces effets sur la production de particules alors que dans la deuxième partie, ces effets sont cruciaux pour décohérer notre état initial. Pour ces raisons, il est commode d'employer des méthodes fonctionnelles comme l'action effective $2PI$.

Elles nous ont permis d'établir les équations du mouvement régissant la dynamique de chaque système étudié depuis la production de particules, dans le cas du *reheating*, ou depuis un état extrêmement cohérent dans la deuxième partie, jusqu'à la thermalisation complète, au sens d'une distribution statistique de type Bose-Einstein ou Fermi-Dirac définissant une température. Ces équations ont été renormalisées de façon à obtenir des résultats largement insensibles à la variation du cut-off ultraviolet. Elles sont ensuite implémentées sur un ordinateur, seule façon de les résoudre sans ajouter aucune autre approximation.

Nous avons montré que le phénomène de transfert d'énergie du champ inflationnaire vers les particules de matière est un phénomène qui nécessite un réglage assez fin des paramètres dans le cadre de l'approximation de champ-moyen. La présence de fermions est néanmoins indispensable à la reproduction du modèle standard de la physique des particules et son rôle se restreint pour le moment à catalyser la production de bosons. Cette catalyse dépend cependant du modèle ainsi que de ses paramètres. Au delà de l'approximation de champ-moyen, l'implémentation numérique se complique et n'est pour le moment pas opérationnelle.

Nous avons également montré que la décohérence d'un état pur est particulièrement bien décrite dans le formalisme de la théorie quantique des champs en utilisant les méthodes fonctionnelles $2PI$. L'évolution effective non-unitaire où l'observateur n'a accès qu'aux fonctions à deux points (ainsi que ses dérivées) conduit le système à un état final thermique même quand celui-ci est "entouré" du vide. Les fluctuations du vide décohèrent le système selon une loi exponentielle dont le taux, dans la limite d'un état initial extrêmement cohérent, dépend des conditions initiales certes, mais où de la dynamique n'intervient qu'à travers un couplage effectif. On conclut de cette étude que la dynamique de cet état peut être traitée en théorie statistique des champs, uniquement dans cette limite, en utilisant des méthodes numériques comme les méthodes monté-carlo. Cette vérification n'a pas été faite à ce jour.

Les techniques $2PI$ présentent un outil puissant pour l'étude des phénomènes hors-équilibre en cosmologie. Ils permettent d'obtenir un traitement quantique complet partant

du principe de moindre action sans inclure aucune autre approximation. Néanmoins, les équations du mouvement obtenues sont pour la plupart insolubles analytiquement et nécessitent un traitement numérique non trivial.

Ce travail n'est pas exhaustif et ouvre de nombreuses perspectives. D'un point de vue global, il est impératif de reprendre toutes ces analyses dans un Univers en expansion. En effet on sait que la métrique, et plus particulièrement l'expansion des échelles de longueurs, jouent un rôle crucial dans la dynamique aussi bien de la production de particules que dans la décohérence des fluctuations primordiales de densité.

Avant cela, il est impératif de faire tourner les simulations du *reheating* dans sa configuration maximale au *Next-to-Leading Order* des équations du mouvement. Ceci est probablement abordable dans un futur proche et les résultats à la clé apporteraient une avancée non négligeable dans ce domaine.

Un autre développement intéressant consiste à étudier la décohérence d'un état pur mettant en jeu uniquement des champs fermioniques [106] et/ou un mélange des deux types de champs. Cette étude complètera notre vision de la décohérence autant en cosmologie qu'en physique des particules.

En conclusion générale à cette thèse j'ajouterai que la cosmologie est l'un des rares domaines de la physique permettant l'étude d'une grande variété de phénomènes hors-équilibre. Son étude ne se cantonne pas à elle-même et j'espère que le travail dans cette thèse en est une démonstration. Ces phénomènes sont d'autant plus importants qu'ils ont pour but de former une compréhension globale et cohérente de l'histoire de l'Univers depuis l'inflation jusqu'à l'apparition de la matière connue où il en revient à la physique des particules de prendre le relais.

Annexes

A Expression des *self-energies* dans le *reheating* bosonique

Les composantes spectrale et statistique des *self-energies* s'écrivent

$$\overline{\Sigma}_F^G(x, y) = -\frac{g^2}{2}I_F(x, y) \quad (61)$$

$$\overline{\Sigma}_\rho^G(x, y) = -\frac{g^2}{2}I_\rho(x, y) \quad (62)$$

$$\overline{\Sigma}_F^D(x, y) = \int_z \left[\mathbb{P}_F(x, z)D_F(z, y) - \frac{1}{4}\mathbb{P}_\rho(x, z)D_\rho(z, y) \right] \quad (63)$$

$$\overline{\Sigma}_\rho^D(x, y) = \int_z [\mathbb{P}_F(x, z)D_\rho(z, y) + \mathbb{P}_\rho(x, z)D_F(z, y)] \quad (64)$$

où l'expression des fonctions $\Pi_F, \Pi_\rho, I_F, I_\rho, \mathbb{P}_F, \mathbb{P}_\rho$ sont

$$\Pi_F(x, y) = D_F^2(x, y) - \frac{1}{4}D_\rho^2(x, y) \quad (65)$$

$$\Pi_\rho(x, y) = 2D_F(x, y)D_\rho(x, y) \quad (66)$$

$$(67)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_F(x, y) = & -\frac{\lambda^2}{18N}I_F(x, y) - \frac{g^2}{N} \left\{ G_F(x, y) - \int_0^{x^0} dz [G_\rho(x, z)I_F(z, y) + I_\rho(x, z)G_F(z, y)] + \right. \\ & + \int_0^{y^0} dz [G_F(x, z)I_\rho(z, y) + I_F(x, z)G_\rho(z, y)] - \int_0^{x^0} dz \int_0^{y^0} dz' I_\rho(x, z)G_F(z, z')I_\rho(z', y) + \\ & \left. + \int_0^{x^0} dz \int_0^{z^0} dz' I_\rho(x, z)G_\rho(z, z')I_F(z', y) + \int_0^{y^0} dz \int_{z^0}^{y^0} dz' I_F(x, z)G_\rho(z, z')I_\rho(z', y) \right\}, \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\rho(x, y) = & -\frac{\lambda^2}{18N}I_\rho(x, y) - \frac{g^2}{N} \left\{ G_\rho(x, y) - \int_{y^0}^{x^0} dz [G_\rho(x, z)I_\rho(z, y) + I_\rho(x, z)G_\rho(z, y)] + \right. \\ & \left. + \int_{y^0}^{x^0} dz \int_{y^0}^{z^0} dz' I_\rho(x, z)G_\rho(z, z')I_\rho(z', y) \right\}. \end{aligned} \quad (69)$$

Explicitons maintenant les *self-energies* dans l'espace de Fourier :

$$\Sigma_F^G(t, t'; k) = -\frac{g^2}{2}I_F(t, t'; k) \quad (70)$$

$$\Sigma_\rho^G(t, t'; k) = -\frac{g^2}{2}I_\rho(t, t'; k) \quad (71)$$

$$\Sigma_F^D(t, t'; k) = \int_{\vec{q}} \left[\mathbb{P}_F(t, t'; q)D_F(t, t'; \|\vec{k} - \vec{q}\|) - \frac{1}{4}\mathbb{P}_\rho(t, t'; q)D_\rho(t, t'; \|\vec{k} - \vec{q}\|) \right] \quad (72)$$

$$\Sigma_\rho^D(t, t'; k) = \int_{\vec{q}} \left[\mathbb{P}_F(t, t'; q)D_\rho(t, t'; \|\vec{k} - \vec{q}\|) + \mathbb{P}_\rho(t, t'; q)D_F(t, t'; \|\vec{k} - \vec{q}\|) \right] \quad (73)$$

avec

$$\begin{aligned}\Pi_F(t, t'; k) &= \int_{\vec{q}} \left[D_F(t, t'; q) D_F(t, t'; \|\vec{k} - \vec{q}\|) - \frac{1}{4} D_\rho(t, t'; q) D_\rho(t, t'; \|\vec{k} - \vec{q}\|) \right] \\ \Pi_\rho(t, t'; k) &= 2 \int_{\vec{q}} D_F(t, t'; q) D_\rho(t, t'; \|\vec{k} - \vec{q}\|),\end{aligned}\tag{74}$$

$$\begin{aligned}I_F(t, t'; k) &= \Pi_F(t, t'; k) - \frac{i\lambda}{6} \left[\int_0^{t'} dt'' I_F(t, t''; k) \Pi_\rho(t'', t'; k) - \int_0^t dt'' I_\rho(t, t''; k) \Pi_F(t'', t'; k) \right] \\ I_\rho(t, t'; k) &= \Pi_\rho(t, t'; k) - \frac{i\lambda}{6} \int_{t'}^t dt'' I_\rho(t, t''; k) \Pi_\rho(t'', t'; k)\end{aligned}\tag{75}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_F(t, t'; k) &= -\frac{\lambda^2}{18N} I_F(t, t'; k) \\ &\quad - \frac{g^2}{N} \left\{ G_F(t, t'; k) - \int_0^t dt'' [G_\rho(t, t''; k) I_F(t'', t'; k) + I_\rho(t, t''; k) G_F(t'', t'; k)] + \right. \\ &\quad + \int_0^{t'} dt'' [G_F(t, t''; k) I_\rho(t'', t'; k) + I_F(t, t''; k) G_\rho(t'', t'; k)] + \\ &\quad - \int_0^t dt'' \int_0^{t'} du I_\rho(t, t''; k) G_F(t'', u; k) I_\rho(u, t'; k) + \\ &\quad + \int_0^t dt'' \int_0^{t''} du I_\rho(t, t''; k) G_\rho(t'', u; k) I_F(u, t'; k) + \\ &\quad \left. + \int_0^{t'} dt'' \int_{t''}^{t'} du I_F(t, t''; k) G_\rho(t'', u; k) I_\rho(u, t'; k) \right\} \\ \mathbb{P}_\rho(t, t'; k) &= -\frac{\lambda^2}{18N} I_\rho(t, t'; k) \\ &\quad - \frac{g^2}{N} \left\{ G_\rho(t, t'; k) - \int_{t'}^t dt'' [G_\rho(t, t''; k) I_\rho(t'', t'; k) + I_\rho(t, t''; k) G_\rho(t'', t'; k)] + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t'}^t dt'' \int_{t'}^{t''} du I_\rho(t, t''; k) G_\rho(t'', u; k) I_\rho(u, t'; k) \right\}.\end{aligned}\tag{76}$$

B Adiabaticité pour les fermions

Dans cette annexe je me propose de calculer l'expression de la composante F_S dans un développement adiabatique au premier ordre non-trivial. Pour cela j'utilise le formalisme des fonctions modes. Dans la représentation de Heisenberg, le champ de Dirac $\psi(t; \vec{x})$ obéit à l'équation¹⁸

$$[i\partial - m_\psi(t)] \psi(t; \vec{x}) = 0\tag{77}$$

et se décompose dans la base propre des vecteurs propres de l'équation de Dirac en

$$\psi(t; \vec{x}) = \sum_{s=\pm} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \left[\hat{a}_{\vec{k},s}(t) u_{\vec{k},s} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{b}_{\vec{k},s}^\dagger(t) v_{\vec{k},s} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right]\tag{78}$$

¹⁸ A une boucle.

où $u_{\vec{k},s}^-$ est le vecteur propre de l'équation de Dirac à fréquence positive avec une hélicité $\pm \frac{1}{2}$ et $v_{\vec{k},s}^- = C\bar{u}_{\vec{k},s}^T$ est son conjugué de charge. Pour construire ces vecteurs propres on pose l'ansatz suivant

$$u_{\vec{k},\pm}^- e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = - \left[i\gamma^0 \partial_{x^0} + i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m_\psi(t) \right] X_k(t) R_\pm(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (79)$$

où $R_\pm(\vec{k})$ sont les vecteurs propres de l'opérateur hélicité $\hat{k} \cdot \Sigma$ tels que

$$\begin{aligned} \hat{k} \cdot \Sigma R_\pm(\vec{k}) &= \pm R_\pm(\vec{k}) \\ \text{et } \gamma_0 R_\pm(\vec{k}) &= R_\pm(\vec{k}). \end{aligned} \quad (80)$$

Toute la dépendance en temps des vecteurs propres de l'équation de Dirac se trouve maintenant dans la fonction $X_k(t)$ qui obéit à l'équation

$$[\partial_t^2 + k^2 + m_\psi^2(t) - i\dot{m}_\psi(t)] X_k(t) = 0. \quad (81)$$

On peut donner comme ansatz pour $X_k(t)$

$$X_k(t) = \frac{w}{\sqrt{A_k(t)}} e^{-i \int_0^t \Omega_k(t') dt'} \quad (82)$$

où $\Omega_k(t)$ et $A_k(t)$ sont des quantités réels et w est un coefficient de normalisation que nous calculerons à la fin à travers le wronskien. En injectant cet ansatz dans l'équation (81) on obtient

$$\Omega_k^2(t) + \frac{\ddot{A}_k(t)}{2A_k(t)} - \frac{3}{4} \frac{\dot{A}_k^2(t)}{A_k^2(t)} = k^2 + m_\psi^2(t) \quad (83)$$

et

$$\Omega_k(t) \frac{\dot{A}_k(t)}{A_k(t)} - \dot{\Omega}_k(t) = \dot{m}_\psi(t). \quad (84)$$

B.1 Approximation d'ordre 0

Commençons par l'ordre zéro *i.e.* où la pulsation $\Omega_k(t)$ ne contient au plus que des termes linéaires des dérivés première par rapport au temps. Les équations (83) et (84) s'écrivent, à cette ordre d'approximation là,

$$\Omega_{k,0}^2(t) = k^2 + m_\psi^2(t) + \mathcal{O}(\ddot{A}_k(t), \dot{A}_k^2(t)) \longrightarrow \dot{\Omega}_{k,0}(t) = \frac{m_\psi(t)\dot{m}_\psi(t)}{\Omega_{k,0}(t)} \quad (85)$$

et

$$\frac{\dot{A}_{k,0}(t)}{A_{k,0}(t)} = \frac{\dot{\Omega}_{k,0}(t) + \dot{m}_\psi(t)}{\Omega_{k,0}(t)} = \dot{m}_\psi(t) \frac{m_\psi(t) + \Omega_{k,0}(t)}{\Omega_{k,0}^2(t)}. \quad (86)$$

En résolvant l'équation (86) on trouve

$$A_{k,0}(t) = \Omega_{k,0}(t) [\Omega_{k,0}(t) + m_\psi(t)] \quad (87)$$

où

$$\Omega_{k,0}(t) = \sqrt{k^2 + m_\psi^2(t)}. \quad (88)$$

Pour calculer la constante w on prend le module de l'équation du wronskien

$$|\dot{X}_{k,0}(t)^* X_{k,0}(t) - X_{k,0}(t)^* \dot{X}_{k,0}(t)| = |i| = 1 \quad (89)$$

ce qui donne $w = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

En fait si on change $\Omega_{k,0}(t)$ en $-\Omega_{k,0}(t)$ on se rend compte que rien ne change dans la résolution de l'équation (81). On a deux solutions indépendantes donc la solution générale est une combinaison linéaire de ces deux solutions. Les coefficients de combinaison sont tels que la somme des modules carrés soit normalisées à 1. Cependant On initialise le système tel que seul les fréquences positives soient admises. Dans ce cas il nous reste juste une seule des deux solutions et on écrit

$$X_{k,0}(t) = \frac{e^{-i \int_0^t \Omega_{k,0}(t') dt'}}{\sqrt{2\Omega_{k,0}(t) [\Omega_{k,0}(t)(t) + m_\psi(t)]}}. \quad (90)$$

On peut relier la fonction $F_S(t, t; k)$ avec la fonction $X_k(t)(t)$ en posant

$$\xi_k(t) = -i\dot{X}_k(t) - m_\psi(t)X_k(t) \quad (91)$$

alors on a

$$F_S(t, t; k) = \frac{1}{2} [|\xi_k(t)|^2 - k^2|X_k(t)|^2] = \frac{1}{2} [1 - 2k^2|X_k(t)|^2]. \quad (92)$$

Dans la limite des grands moments (large-k limit) on s'attend à ce que l'approximation adiabatique soit valable car

$$\frac{\dot{A}_{k,0}(t)}{A_{k,0}(t)} \approx \frac{\dot{m}_\psi(t)}{k} \quad (93)$$

alors que les termes négligés dans (83) $\frac{\ddot{A}_{k,0}(t)}{A_{k,0}(t)}$ et $\left(\frac{\dot{A}_{k,0}(t)}{A_{k,0}(t)}\right)^2$ sont respectivement d'ordre $\frac{\ddot{m}_\psi(t)}{k}$ et $\left(\frac{\dot{m}_\psi(t)}{k}\right)^2$. L'approximation adiabatique est respectée si et seulement si

$$\frac{\ddot{m}_\psi(t)}{k^3} \ll 1 \text{ et } \left(\frac{\dot{m}_\psi(t)}{k^2}\right)^2 \ll 1. \quad (94)$$

ce qui est toujours vraie pour des modes suffisamment énergétiques.

Dans la limite large-k on trouve

$$F_{S,0}(t, t; k) \approx \frac{m_\psi(t)}{2\Omega_{k,0}(t)} \quad (95)$$

ce qui rend impossible la génération d'un terme en $\ddot{\phi}(t)$ dans l'équation pour le champs macroscopique et par conséquent pas de correction δZ . Il faut donc calculer l'ordre suivant dans le développement adiabatique pour les quantités $\Omega_k(t)$, $A_k(t)$ et donc $X_k(t)$.

B.2 Approximation d'ordre 1

Pour calculer l'ordre suivant du développement adiabatique, on calcul les termes correctifs de (83) en utilisant $A_{k,0}(t)$ au lieu de $A_k(t)$

$$\begin{aligned} \Omega_k^2(t) &= \Omega_{k,0}^2(t) - \frac{\ddot{A}_{k,0}(t)}{2A_{k,0}(t)} + \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{A}_k(t)}{A_k(t)} \right)^2 \\ &= \Omega_{k,0}^2(t) + \frac{\Omega_{k,0}(t) + m_\psi(t)}{2\Omega_{k,0}^2(t)} \left[\ddot{m}_\psi(t) + \frac{\dot{m}_\psi^2(t)}{2\Omega_{k,0}(t)} \left(1 - \frac{5m_\psi(t)}{\Omega_{k,0}(t)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (96)$$

Pour prévenir une éventuelle divergence infrarouge, il peut être plus convenient de faire un développement à grand $\Omega_{k,0}(t)$ au lieu d'un développement à grand k . Dans ce cas on obtient

$$\Omega_k^2(t) = \Omega_{k,0}^2(t) \left[1 - \frac{\ddot{m}_\psi(t)}{2\Omega_{k,0}^3(t)} + \mathcal{O} \left(\frac{m_\psi(t)\ddot{m}_\psi(t)}{\Omega_{k,0}^4(t)}, \frac{\dot{m}_\psi^2(t)}{\Omega_{k,0}^4(t)} \right) \right]. \quad (97)$$

On peut maintenant calculer la correction à $A_{k,0}(t)$ en utilisant l'expression (97) ce qui donne

$$\delta A_k(t) \equiv A_k(t) - A_{k,0}(t) = \frac{\ddot{m}_\psi(t) + \kappa}{4\Omega_{k,0}(t)} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\Omega_{k,0}^2(t)} \right). \quad (98)$$

Pour calculer le coefficient w on réinjecte l'expression de $A_k(t)$ avec sa correction dans celle de $\Omega_k^2(t)$ lors du calcul de l'équation résultante du module du wronskien. A l'approximation des grands $\Omega_{k,0}(t)$ on trouve

$$|w|^2 = \frac{A_k(t)}{[\Omega_k(t) + m_\psi(t)]^2 + k^2 + \left(\frac{\dot{A}_k(t)}{2A_k(t)} \right)^2} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\kappa}{\Omega_{k,0}^3(t)} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\Omega_{k,0}^4(t)} \right) \right]. \quad (99)$$

ce qui donne bien $w = \frac{1}{\sqrt{2}}$ dans le cas où on choisi $\kappa = 0$. En résumé on a

$$X_k(t) = \frac{e^{-i \int_0^t \Omega_k(t') dt'}}{\sqrt{2A_k(t)}} \quad (100)$$

$$\Omega_k^2(t) = k^2 + m_\psi^2(t) + \frac{\ddot{m}_\psi(t)}{2\sqrt{k^2 + m_\psi^2(t)}} \quad (101)$$

$$A_k(t) = \sqrt{k^2 + m_\psi^2(t)} \left(\sqrt{k^2 + m_\psi^2(t)} + m_\psi(t) \right) + \frac{\ddot{m}_\psi(t) + \kappa}{4\sqrt{k^2 + m_\psi^2(t)}}. \quad (102)$$

En utilisant la définition (92) pour $F_S(t, t; k)$ on trouve

$$F_S(t, t; k) = \frac{1}{2} \frac{[\Omega_k(t) + m_\psi(t)]^2 + \left(\frac{\dot{A}_k(t)}{2A_k(t)} \right)^2 - k^2}{[\Omega_k(t) + m_\psi(t)]^2 + \left(\frac{\dot{A}_k(t)}{2A_k(t)} \right)^2 + k^2} \quad (103)$$

où $\frac{\dot{A}_k(t)}{A_k(t)} = \frac{\dot{\Omega}_k(t) + \dot{m}_\psi(t)}{\Omega_k(t)}$. On aboutit finalement à l'expression adiabatique de F_S développée au premier ordre

$$F_S(t, t; k) = \frac{m_\psi}{2\Omega_{k,0}(t)} - \frac{\ddot{m}_\psi}{8\Omega_{k,0}^3(t)} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\Omega_{k,0}^4(t)} \right). \quad (104)$$

C Adiabaticité pour les bosons

Je propose maintenant de faire le même travail qu'en annexe (B) pour les bosons et montrer que la correction du premier ordre du développement adiabatique n'apporte aucune divergence UV et que l'ordre zéro suffit. Partons de l'équation¹⁹ de Klein-Gordon pour un champ scalaire $\sigma(t; \vec{x})$

$$[\square + M^2(t)] \sigma(t; \vec{x}) = 0. \quad (105)$$

¹⁹à une boucle

Comme pour les fermions, on décompose le champ $\sigma(x)$ en modes de Fourier

$$\sigma(t; \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi^3)} \left[a_k f_k(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + a_k^\dagger f_k^*(t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right] \quad (106)$$

où a_k et a_k^\dagger sont les opérateurs de création et d'annihilation, et où toute la dépendance en temps se trouve dans les fonctions modes $f_k(t)$. En utilisant cette expression pour σ on trouve l'équation du mouvement habituelle pour les fonctions modes

$$[\partial_t^2 + k^2 + M^2(t)] f_k(t) = 0. \quad (107)$$

On fait l'ansatz suivant

$$f_k(t) = \frac{w'}{\sqrt{A_k(t)}} e^{-i \int_0^t \Omega_k(t') dt'} \quad (108)$$

où w' est un coefficient de normalisation une fois de plus donné par le calcul du wronskien²⁰. La relation de dispersion issue de l'injection de l'ansatz (108) dans l'équation (162) nous donne le système suivant

$$\Omega_k^2(t) + \frac{\ddot{A}_k(t)}{2A_k(t)} - \left(\frac{\dot{A}_k(t)}{A_k(t)} \right)^2 = k^2 + m_\psi^2(t) \quad (109)$$

$$\frac{\dot{A}_k(t)}{A_k(t)} = \frac{\dot{\Omega}_k(t)}{\Omega_k(t)} \Rightarrow A_k(t) = \Omega_k(t). \quad (110)$$

Une fois de plus, nous avons deux solutions indépendantes mais pour interdire les ondes à fréquences négatives, nous ne conservons que la solution

$$f_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\Omega_k(t)}} e^{i \int_0^t \Omega_k(t') dt'}. \quad (111)$$

C.1 Approximation d'ordre 0

L'approximation la plus basse que nous pouvons faire est de considérer que

$$\Omega_{k,0}^2(t) = k^2 + M^2(t). \quad (112)$$

Nous pouvons remarquer de suite que $\frac{\dot{\Omega}_{k,0}(t)}{\Omega_{k,0}(t)} \sim \frac{M(t)\dot{M}(t)}{k^2}$ et que $\frac{\ddot{\Omega}_{k,0}(t)}{2\Omega_{k,0}(t)} \sim \frac{M(t)\ddot{M}(t) + \dot{M}^2(t)}{k^2}$ dans le développement à haute énergie.

La composante statistique du propagateur du bosons s'écrit

$$G_F^\perp(t, t; k) = |f_k(t)|^2 = \frac{1}{2\Omega_k(t)} \quad (113)$$

qui prend la forme suivante dans à cet ordre du développement adiabatique

$$G_{F,0}^\perp(t, t; k) = \frac{1}{2\sqrt{k^2 + M^2(t)}}. \quad (114)$$

²⁰On pourra vérifier qu'une fois de plus ce calcul donne $w' = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

C.2 Approximation d'ordre 1

On peut maintenant calculer la correction du premier ordre à l'expression (114) en procédant de la même façon que précédemment. On remarque dès à présent que les premières correction à $\Omega_k(t)$ sont d'ordre $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ et non pas d'ordre $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ comme pour les fermions. Ceci en résulte que

$$G_F^\perp(t, t; k) = \frac{1}{2\sqrt{k^2 + M^2(t)}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^4}\right). \quad (115)$$

A l'ordre du tadpol²¹, la première correction adiabatique à l'expression du propagateur du bosons ne diverge pas pour les modes UV. Ceci explique pourquoi le tad-pole de bosons n'induit pas de correction proportionnelle à $\ddot{\phi}(t)$ et ne participe pas à l'expression de δZ .

D Relations entre propagateurs fermioniques et fonctions modes

Dans cette section je me propose d'établir les relations qui expriment chaque composante²² du propagateur fermionique. Considérant qu'initialement le nombre de particules, le nombre d'antiparticules et le nombre de paires sont tous nuls²³ on déduit facilement, d'après les définitions (2.10) du chapitre 2 et la définition (78) que

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta}^>(t, t'; \vec{k}) &= \sum_s u_{k,s,\alpha}(t) \bar{u}_{k,s,\beta}(t') \\ D_{\alpha\beta}^<(t, t'; \vec{k}) &= \sum_s \bar{v}_{-k,s,\beta}(t') v_{-k,s,\alpha}(t). \end{aligned} \quad (116)$$

Avec les définitions (2.22), (2.23) et celle des fonctions modes fermioniques $X_k(t)$ on montre, après quelques étapes de calculs, que les fonctions statistiques s'écrivent

$$F_S(t, t'; k) = \frac{1}{2} \text{Re} [\xi_k(t) \xi_k^*(t') - k^2 X_k(t) X_k^*(t')] \quad (117)$$

$$F_0(t, t'; k) = \frac{1}{2} \text{Im} [\xi_k(t) \xi_k^*(t') + k^2 X_k(t) X_k^*(t')] \quad (118)$$

$$F_V(t, t'; k) = -\frac{k}{2} \text{Re} [\xi_k(t) X_k^*(t') + X_k(t) \xi_k^*(t')] \quad (119)$$

$$F_T(t, t'; k) = -\frac{k}{2} \text{Im} [\xi_k(t) X_k^*(t') - k^2 X_k(t) \xi_k^*(t')] \quad (120)$$

et pour les fonctions spectrales prennent la forme

$$\rho_S(t, t'; k) = -\text{Im} [\xi_k(t) \xi_k^*(t') - k^2 X_k(t) X_k^*(t')] \quad (121)$$

$$\rho_0(t, t'; k) = \text{Re} [\xi_k(t) \xi_k^*(t') + k^2 X_k(t) X_k^*(t')] \quad (122)$$

$$\rho_V(t, t'; k) = k \text{Im} [\xi_k(t) X_k^*(t') + X_k(t) \xi_k^*(t')] \quad (123)$$

$$\rho_T(t, t'; k) = -k \text{Re} [\xi_k(t) X_k^*(t') - k^2 X_k(t) \xi_k^*(t')]. \quad (124)$$

On trouve que ces expressions à temps égaux valent

$$F_S(t, t; k) = \frac{1}{2} [| \xi_k(t) |^2 - k^2 | X_k(t) |^2] \quad (125)$$

$$F_V(t, t; k) = -k \text{Re} [\xi_k(t) X_k^*(t)] \quad (126)$$

$$F_T(t, t; k) = -k \text{Im} [\xi_k(t) X_k^*(t)] \quad (127)$$

et les autres sont nuls.

²¹Ordre à une boucle.

²²Nous nous focaliserons uniquement sur les composantes pertinentes pour notre théorie.

²³ $\langle a^\dagger a \rangle = \langle b^\dagger b \rangle = \langle a^\dagger b \rangle = 0$.

E Théorie libre

Dans cette annexe je me propose d'établir l'expression analytique des propagateurs bosoniques et fermioniques dans le cas d'une théorie sans interaction (libre) ce qui nous est utile pour calculer les premiers pas en temps de nos simulations numériques.

E.1 Secteur bosonique

Il suffit de résoudre les équations

$$(\partial_t^2 + M^2) \phi(t) = 0 \quad (128)$$

$$(\partial_t^2 + k^2 + M^2) G_F(t, t'; k) = 0 \quad (129)$$

$$(\partial_t^2 + k^2 + M^2) G_\rho(t, t'; k) = 0 \quad (130)$$

avec pour conditions initiales

$$\phi(t=0) = \phi_0 \quad (131)$$

$$G_F(t, t'; k)|_{t'=t=0} = G_{F,00} \quad (132)$$

$$\partial_t G_F(t, t'; k)|_{t'=t=0} = \partial G_{F,00} \quad (133)$$

$$\partial_t \partial_{t'} G_F(t, t'; k)|_{t'=t=0} = \partial \partial G_{F,00} \quad (134)$$

et les fonctions spectrales sont initialisées par les relations de commutation de la mécanique quantique

$$G_\rho(t, t'; k)|_{t'=t=0} = 0 \quad (135)$$

$$\partial_t G_\rho(t, t'; k)|_{t'=t=0} = 1 \quad (136)$$

$$\partial_t \partial_{t'} G_\rho(t, t'; k)|_{t'=t=0} = 0. \quad (137)$$

D'après les symétries (1.46) de G_F et G_ρ on déduit que

$$\phi(t) = \phi_0 \cos Mt \quad (138)$$

$$\begin{aligned} G_F(t, t'; k) &= \frac{\omega_k^2 G_{F,00} - \partial \partial G_{F,00}}{2\omega_k^2} \cos \omega_k(t + t') + \frac{\omega_k^2 G_{F,00} + \partial \partial G_{F,00}}{2\omega_k^2} \cos \omega_k(t - t') \\ &\quad + \frac{\partial G_{F,00}}{\omega_k} \sin \omega_k(t + t') \end{aligned} \quad (139)$$

$$G_\rho(t, t'; k) = \frac{1}{\omega_k} \sin \omega_k(t - t') \quad (140)$$

où $\omega_k = \sqrt{k^2 + M^2}$.

E.2 Secteur fermionique

Il suffit de résoudre les équations pour les fonctions statistiques et en déduire les solutions des fonctions spectrales. L'équation de Dirac s'écrit en composante de Lorentz dans la théorie libre

$$\partial_t F_S(t, t'; k) = -k F_T(t, t'; k) + m F_0(t, t'; k) \quad (141)$$

$$\partial_t F_0(t, t'; k) = -k F_V(t, t'; k) - m F_S(t, t'; k) \quad (142)$$

$$\partial_t F_V(t, t'; k) = k F_0(t, t'; k) + m F_T(t, t'; k) \quad (143)$$

$$\partial_t F_T(t, t'; k) = k F_S(t, t'; k) - m F_V(t, t'; k) \quad (144)$$

et idem pour $\rho_{(\Gamma)}$. Si on dérive par rapport au temps t à gauche et à droite chaque ligne on obtient l'équation de Klein-Gordon

$$\partial_t^2 F_{(\Gamma)}(t, t'; k) = -(k^2 + m^2) F_{(\Gamma)}(t, t'; k) \quad (145)$$

et idem pour $\rho_{(\Gamma)}$. En considérant que F_S, F_V, F_T et ρ_0 sont des fonctions symétriques et que F_0, ρ_S, ρ_V et ρ_T sont des fonctions antisymétriques on obtient

$$\begin{aligned} F_S(t, t'; k) &= \frac{k^2}{\omega_k^2} \left(F_{S,00} - \frac{m}{k} F_{V,00} \right) \cos \omega_k(t + t') + \frac{mk}{\omega_k^2} \left(F_{V,00} + \frac{m}{k} F_{S,00} \right) \cos \omega_k(t - t') \\ &\quad - \frac{k}{\omega_k} F_{T,00} \sin \omega_k(t + t') \end{aligned} \quad (146)$$

$$F_0(t, t'; k) = -\frac{k F_{V,00} + m F_{S,00}}{\omega_k} \sin \omega_k(t - t') \quad (147)$$

$$\begin{aligned} F_V(t, t'; k) &= -\frac{mk}{\omega_k^2} \left(F_{S,00} - \frac{m}{k} F_{V,00} \right) \cos \omega_k(t + t') + \frac{k^2}{\omega_k^2} \left(F_{V,00} + \frac{m}{k} F_{S,00} \right) \cos \omega_k(t - t') \\ &\quad - \frac{m}{\omega_k} F_{T,00} \sin \omega_k(t + t') \end{aligned} \quad (148)$$

$$F_T(t, t'; k) = F_{T,00} \cos \omega_k(t + t') + \frac{k}{\omega_k} \left(F_{S,00} - \frac{m}{k} F_{V,00} \right) \sin \omega_k(t + t') \quad (149)$$

$$(150)$$

$$(151)$$

$$\rho_S(t, t'; k) = \frac{m}{\omega_k} \sin \omega_k(t - t') \quad (152)$$

$$\rho_0(t, t'; k) = \cos \omega_k(t - t') \quad (153)$$

$$\rho_V(t, t'; k) = \frac{k}{\omega_k} \sin \omega_k(t - t') \quad (154)$$

$$\rho_T(t, t'; k) = 0 \quad (155)$$

où $\omega_k^2 = k^2 + m^2$ et $F_{(\Gamma),00} = F_{(\Gamma)}(t = 0, t' = 0; k)$.

F Théorie libre discrète

Pour initialiser correctement le premier pas de nos propagateurs, et le champs macroscopique il ne suffit pas de prendre la solution de la théorie libre au temps $t = A_T$ mais il faut veiller à ce que la phase d'oscillation soit positive après discretisation. Pour cela il faut résoudre les équations du mouvement discrètes de la théorie libre.

F.1 Secteur bosonique

Commençons par le champs macroscopique. Son équation du mouvement dans l'espace-temps continue (2.117) s'écrit dans l'espace-temps discret

$$\phi_{n+1} - (2 - A_T^2 \omega^2) \phi_n + \phi_{n-1} = 0 \quad (156)$$

On pose que la solution de cette suite de Fibonacci s'écrit sous la forme $\phi_n = \xi^n \equiv (re^{i\theta})^n$. On obtient alors l'équation algébrique suivante

$$\xi^2 - (2 - A_T^2 \omega^2) \xi + 1 = 0 \quad (157)$$

dont les deux solutions complexes sont

$$\xi_{\pm} = 1 - \frac{A_T^2 \omega^2}{2} \pm i A_T \omega \sqrt{1 - \frac{A_T^2 \omega^2}{4}}. \quad (158)$$

On vérifie au passage que $\xi_+ = \xi_-^*$ et que $|\xi| = r = 1$. De ces deux solutions il faut sélectionner celle dont la phase, ce qui donne la fréquence d'oscillation du champ, reste positive. On admet fatalement que, si la discretisation en temps est correcte, $A_T \omega \ll 1$. Il reste donc la solution

$$\tan \theta = \frac{A_T \omega \sqrt{1 - \frac{A_T^2 \omega^2}{4}}}{1 - \frac{A_T^2 \omega^2}{2}} \quad (159)$$

dont la partie réelle représente, à une normalisation près, la solution discrète de notre champs macroscopique, à savoir

$$\phi_n = \phi_0 \cos \left[n \arctan \left(\frac{A_T \omega \sqrt{1 - \frac{A_T^2 \omega^2}{4}}}{1 - \frac{A_T^2 \omega^2}{2}} \right) \right]. \quad (160)$$

Pour l'équation du mouvement du propagateur $G^\perp(t, t'; k)$ on utilise les fonction modes dont la définition nous mène à l'égalité suivante

$$G^\perp(t, t'; k) = \frac{f_k(t) f_k^*(t') + f_k^*(t) f_k(t')}{2} \quad (161)$$

et l'équation du mouvement de la théorie libre pour les fonctions modes devient

$$(\partial_t^2 + k^2 + M^2) f_k(t) = 0 \quad (162)$$

dont la solution discrète est

$$f_{k,n} = f_{k,0} \exp \left[i n \arctan \left(\frac{A_T \Omega_k \sqrt{1 - \frac{A_T^2 \Omega_k^2}{4}}}{1 - \frac{A_T^2 \Omega_k^2}{2}} \right) \right] \quad (163)$$

où $\Omega_k^2 = k^2 + M^2$.

F.2 Secteur fermionique

Faisons le même travail avec les fermions. Une fois de plus partons de la théorie libre continue pour les fonctions modes $X_k(t)$ définies en annexe (B) dont l'équation du mouvement est donné par (81) avec une masse constante. Là encore on retrouve l'équation habituelle

$$(\partial_t^2 + \Omega_k^2) X_k(t) = 0 \quad (164)$$

qui se résoud exactement comme dans le cas des bosons. On trouve la solution

$$X_{k,n} = X_{k,0} \exp \left[i n \arctan \left(\frac{A_T \Omega_k \sqrt{1 - \frac{A_T^2 \Omega_k^2}{4}}}{1 - \frac{A_T^2 \Omega_k^2}{2}} \right) \right] \quad (165)$$

où $\Omega_k^2 = k^2 + m^2$. Il faut maintenant relier cela au propagateurs fermionique. Pour cela on utilise les relations (117) à (124) sachant que d'après la relation (91), ξ_k est proportionnel à X_k .

Nous avons donc les solutions de la théorie libre dans un temps discrétisé comme indiqué dans les section (1.8) et (2.10) des chapitres 1 et 2 respectivement.

G Equations du mouvement pour les fermions et self-energies

G.1 Equations du mouvement pour les fermions

Dans cet annexe je développe les équations du mouvement des fermions, composante par composante, dans l'espace de Fourier.

$$\begin{aligned}
\partial_t F_S(t, t'; k) &= -k F_T(t, t'; k) + m_\psi(\phi) F_0(t, t'; k) \\
&+ \int_0^t dt'' [A_S(t, t''; k) F_0(t'', t'; k) + A_0(t, t''; k) F_S(t'', t'; k) \\
&+ A_V(t, t''; k) F_T(t'', t'; k) - A_T(t, t''; k) F_V(t'', t'; k)] \\
&- \int_0^{t'} dt'' [C_S(t, t''; k) \rho_0(t'', t'; k) + C_0(t, t''; k) \rho_S(t'', t'; k) \\
&+ C_V(t, t''; k) \rho_T(t'', t'; k) - C_T(t, t''; k) \rho_V(t'', t'; k)] \quad (166)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t F_0(t, t'; k) &= -k F_V(t, t'; k) - m_\psi(\phi) F_S(t, t'; k) \\
&- \int_0^t dt'' [A_S(t, t''; k) F_S(t'', t'; k) - A_0(t, t''; k) F_0(t'', t'; k) \\
&- A_V(t, t''; k) F_V(t'', t'; k) - A_T(t, t''; k) F_T(t'', t'; k)] \\
&+ \int_0^{t'} dt'' [C_S(t, t''; k) \rho_S(t'', t'; k) - C_0(t, t''; k) \rho_0(t'', t'; k) \\
&- C_V(t, t''; k) \rho_V(t'', t'; k) - C_T(t, t''; k) \rho_T(t'', t'; k)] \quad (167)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t F_V(t, t'; k) &= k F_0(t, t'; k) + m_\psi(\phi) F_T(t, t'; k) \\
&+ \int_0^t dt'' [A_S(t, t''; k) F_T(t'', t'; k) + A_T(t, t''; k) F_S(t'', t'; k) \\
&+ A_0(t, t''; k) F_V(t'', t'; k) - A_V(t, t''; k) F_0(t'', t'; k)] \\
&- \int_0^{t'} dt'' [C_S(t, t''; k) \rho_T(t'', t'; k) + C_T(t, t''; k) \rho_S(t'', t'; k) \\
&+ C_0(t, t''; k) \rho_V(t'', t'; k) - C_V(t, t''; k) \rho_0(t'', t'; k)] \quad (168)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t F_T(t, t'; k) &= k F_S(t, t'; k) - m_\psi(\phi) F_V(t, t'; k) \\
&- \int_0^t dt'' [A_S(t, t''; k) F_V(t'', t'; k) + A_V(t, t''; k) F_S(t'', t'; k) \\
&- A_0(t, t''; k) F_T(t'', t'; k) - A_T(t, t''; k) F_0(t'', t'; k)] \\
&+ \int_0^{t'} dt'' [C_S(t, t''; k) \rho_V(t'', t'; k) + C_V(t, t''; k) \rho_S(t'', t'; k) \\
&- C_0(t, t''; k) \rho_T(t'', t'; k) - C_T(t, t''; k) \rho_0(t'', t'; k)] \quad (169)
\end{aligned}$$

et pour les fonctions spectrales

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho_S(t, t'; k) &= -k \rho_T(t, t'; k) + m_\psi(\phi) \rho_0(t, t'; k) \\
&+ \int_{t'}^t dt'' [A_S(t, t''; k) \rho_0(t'', t'; k) + A_0(t, t''; k) \rho_S(t'', t'; k) \\
&+ A_V(t, t''; k) \rho_T(t'', t'; k) - A_T(t, t''; k) \rho_V(t'', t'; k)] \quad (170)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho_0(t, t'; k) &= -k \rho_V(t, t'; k) - m_\psi(\phi) \rho_S(t, t'; k) \\
&+ \int_{t'}^t dt'' [A_S(t, t''; k) F_S(t'', t'; k) - A_0(t, t''; k) F_0(t'', t'; k) \\
&- A_V(t, t''; k) F_V(t'', t'; k) - A_T(t, t''; k) F_T(t'', t'; k)] \quad (171)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho_V(t, t'; k) &= k \rho_0(t, t'; k) + m_\psi(\phi) \rho_T(t, t'; k) \\
&- \int_{t'}^t dt'' [A_S(t, t''; k) \rho_T(t'', t'; k) + A_T(t, t''; k) \rho_S(t'', t'; k) \\
&+ A_0(t, t''; k) \rho_V(t'', t'; k) - A_V(t, t''; k) \rho_0(t'', t'; k)] \quad (172)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho_T(t, t'; k) &= k \rho_S(t, t'; k) - m_\psi(\phi) \rho_V(t, t'; k) \\
&- \int_{t'}^t dt'' [A_S(t, t''; k) \rho_V(t'', t'; k) + A_V(t, t''; k) \rho_S(t'', t'; k) \\
&- A_0(t, t''; k) \rho_T(t'', t'; k) - A_T(t, t''; k) \rho_0(t'', t'; k)] . \quad (173)
\end{aligned}$$

Les selfs-energies sont explicitées à la suite

G.2 Selfs-energies pour les fermions

Dans ce paragraphe je développe les composantes des self-énergies des fermions dans l'espace de Fourier.

$$\begin{aligned}
A_{(\Gamma)}(t, t'; k) &= g^2 \frac{N_b}{N^2} \int_q [G_F^\perp(t, t'; q) F_{(\Gamma)}(t, t'; |\vec{k} - \vec{q}|) \\
&- \frac{1}{4} G_\rho^\perp(t, t'; q) \rho_{(\Gamma)}(t, t'; |\vec{k} - \vec{q}|)] \quad (174)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{(\Gamma)}(t, t'; k) &= g^2 \frac{N_b}{N^2} \int_q [G_F^\perp(t, t'; q) \rho_{(\Gamma)}(t, t'; |\vec{k} - \vec{q}|) \\
&- \frac{1}{4} G_\rho^\perp(t, t'; q) F_{(\Gamma)}(t, t'; |\vec{k} - \vec{q}|)] \quad (175)
\end{aligned}$$

$$(176)$$

pour $\Gamma \equiv \{S, T\}$ et

$$A_{(\Gamma)}(t, t'; k) = -g^2 \frac{N_b}{N^2} \int_q \left[G_F^\perp(t, t'; q) F_{(\Gamma)}(t, t'; |\vec{k} - \vec{q}|) - \frac{1}{4} G_\rho^\perp(t, t'; q) \rho_{(\Gamma)}(t, t'; |\vec{k} - \vec{q}|) \right] \quad (177)$$

$$C_{(\Gamma)}(t, t'; k) = -g^2 \frac{N_b}{N^2} \int_q \left[G_F^\perp(t, t'; q) \rho_{(\Gamma)}(t, t'; |\vec{k} - \vec{q}|) - \frac{1}{4} G_\rho^\perp(t, t'; q) F_{(\Gamma)}(t, t'; |\vec{k} - \vec{q}|) \right] \quad (178)$$

$$(179)$$

pour $\Gamma \equiv \{0, V\}$.

G.3 Selfs-energies pour les bosons

Dans ce paragraphe je développe les composantes des self-énergies des bosons dans l'espace de Fourier.

$$\begin{aligned} \Sigma_F^\perp(t, t'; k) = & -\frac{4g^2}{N} \int_q \left\{ F_S(t, t'; q) F_S(t, t'; |\vec{k} - \vec{q}|) - \frac{1}{4} \rho_S(t, t'; q) \rho_S(t, t'; |\vec{k} - \vec{q}|) \right. \\ & - F_0(t, t'; q) F_0(t, t'; |\vec{k} - \vec{q}|) + \frac{1}{4} \rho_0(t, t'; q) \rho_0(t, t'; |\vec{k} - \vec{q}|) \\ & - \frac{\vec{q} \cdot (\vec{k} - \vec{q})}{q |\vec{k} - \vec{q}|} \left[F_V(t, t'; q) F_V(t, t'; |\vec{k} - \vec{q}|) - \frac{1}{4} \rho_V(t, t'; q) \rho_V(t, t'; |\vec{k} - \vec{q}|) \right. \\ & \left. \left. - F_T(t, t'; q) F_T(t, t'; |\vec{k} - \vec{q}|) + \frac{1}{4} \rho_T(t, t'; q) \rho_T(t, t'; |\vec{k} - \vec{q}|) \right] \right\} \quad (180) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_\rho^\perp(t, t'; k) = & -\frac{4g^2}{N} \int_q \left\{ \rho_S(t, t'; q) F_S(t, t'; |\vec{k} - \vec{q}|) + F_S(t, t'; q) \rho_S(t, t'; |\vec{k} - \vec{q}|) \right. \\ & - \rho_0(t, t'; q) F_0(t, t'; |\vec{k} - \vec{q}|) - F_0(t, t'; q) \rho_0(t, t'; |\vec{k} - \vec{q}|) \\ & - \frac{\vec{q} \cdot (\vec{k} - \vec{q})}{q |\vec{k} - \vec{q}|} \left[\rho_V(t, t'; q) F_V(t, t'; |\vec{k} - \vec{q}|) + F_V(t, t'; q) \rho_V(t, t'; |\vec{k} - \vec{q}|) \right. \\ & \left. \left. - \rho_T(t, t'; q) F_T(t, t'; |\vec{k} - \vec{q}|) - F_T(t, t'; q) \rho_T(t, t'; |\vec{k} - \vec{q}|) \right] \right\}. \quad (181) \end{aligned}$$

H Renormalisation via les dérivées du potentiel effectif static à une boucle

Nous pouvons également calculer les contretermes de la théorie via les dérivées successives du potentiel effectif statique à une boucle. Pour cela il faut intégrer explicitement la composante temporelle du potentiel effectif et imposer la valeur des dérivées de celui-ci.

$$\begin{aligned} V_{eff}^{1-loop}[\phi, G_{cl}^\perp, D_{cl}] = & V[\phi] + \frac{iN_b}{2} \int^{\Lambda_4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Lni} [q^2 - M_\pi^2(\phi)] \\ & - iN \int^{\Lambda_4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Lni} \left[\frac{\not{q} + m_\psi(\phi)}{q^2 - m_\psi^2(\phi)} \right] \quad (182) \end{aligned}$$

qui donne une fois intégré sur la composante temporelle de l'impulsion

$$V_{eff}^{1-loop}[\phi, G_{cl}^\perp, D_{cl}] = V[\phi] + \frac{N_b}{2} \int^{\Lambda_3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left(\sqrt{q^2 + M_\pi^2(\phi)} - q \right) - 2N \int^{\Lambda_3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left(\sqrt{q^2 + m_\psi^2(\phi)} - q \right). \quad (183)$$

Régularisation 4D v.s. régularisation 3D

Ici Λ_4 signifie que l'on régularise les 4 dimensions spatio-temporelles. Or le schéma de notre dynamique n'est pas le même. Nous régularisons que les 3 dimensions d'espace étant donné que nous n'avons pas l'invariance par translation dans le temps. Il faut donc vérifier que ces deux méthodes de régularisation sont bien équivalentes. Pour cela le terme $\text{TrLn} G_{cl}^{\perp, -1}$, une fois exprimé avec la quadri-impulsion euclidienne²⁴, prend la forme

$$\int_0^{\Lambda_4} \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \ln \left(1 + \frac{M_\pi^2(\phi)}{q_E^2} \right) = \frac{M_\pi^2(\phi) \Lambda_4^2}{16\pi^2} - \frac{M_\pi^4(\phi)}{32\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\Lambda_4^2}{M_\pi^2(\phi)} \right) + \frac{1}{2} \right] + \mathcal{O} \left(\frac{M_\pi^6(\phi)}{\Lambda_3^2} \right) \quad (184)$$

alors que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_4}{2\pi} \int_0^{\Lambda_3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \ln \left(1 + \frac{M_\pi^2(\phi)}{q_E^2} \right) = \frac{M_\pi^2(\phi) \Lambda_3^2}{8\pi^2} - \frac{M_\pi^4(\phi)}{32\pi^2} \left[\ln \left(\frac{4\Lambda_3^2}{M_\pi^2(\phi)} \right) - \frac{1}{2} \right] + \mathcal{O} \left(\frac{M_\pi^6(\phi)}{\Lambda_3^2} \right). \quad (185)$$

Calculons maintenant le rapport des deux expressions trouvées

$$R = \frac{\int_0^{\Lambda_4} \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \ln \left(1 + \frac{M_\pi^2(\phi)}{q_E^2} \right)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_4}{2\pi} \int_0^{\Lambda_3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3}} = \frac{\lambda_4^2 - \frac{M_\pi^2(\phi)}{2} \ln \frac{\Lambda_4^2}{M_\pi^2(\phi)}}{2\lambda_3^2 - \frac{M_\pi^2(\phi)}{2} \ln \frac{2\Lambda_3^2}{M_\pi^2(\phi)}} \frac{1 - \frac{M_\pi^2(\phi)}{4\Lambda_4^2} + \dots}{1 + \frac{M_\pi^2(\phi)}{8\Lambda_3^2} (1 - 2 \ln 2 + \dots)}. \quad (186)$$

Si on choisi

$$\Lambda \equiv \Lambda_3 = \frac{\Lambda_4}{\sqrt{2}} \quad (187)$$

on arrive à

$$R = 1 + \mathcal{O} \left(\frac{M_\pi^2(\phi)}{\Lambda_4^2} \right). \quad (188)$$

De cette analyse on conclut que notre régularisation qui consiste à intégrer la partie temporelle exactement et régulariser que la partie spatiale, équivaut à régulariser les 4 dimensions spatio-temporelles directement pourvu que les régulateur obéissent la relation (187), soit

$$\int^{\sqrt{2}\Lambda} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \equiv \int_0^\Lambda \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_0}{2\pi}. \quad (189)$$

²⁴Pour cela on pose $iq_4 = q_0$.

Conditions de renormalisation et expression des contre-termes

De (183) on tire l'expression des contre-termes renormalisant la théorie en imposant les conditions de renormalisation suivantes

$$\left[\frac{\delta V_{eff}(\phi)}{\delta \phi(x)} \right]_{\phi=0} = 0 \quad (190)$$

$$\left[\frac{\delta^2 V_{eff}(\phi)}{\delta \phi^2(x)} \right]_{\phi=0} = M_R^2 \quad (191)$$

$$\left[\frac{\delta^3 V_{eff}(\phi)}{\delta \phi^3(x)} \right]_{\phi=0} = 0 \quad (192)$$

$$\left[\frac{\delta V_{eff}(\phi)}{\delta \phi^4(x)} \right]_{\phi=\mu} = \frac{\lambda_R}{N_b} \quad (193)$$

où μ est une échelle de renormalisation non nulle pour éviter toute divergence infrarouge dans la fonction à quatre points. On trouve

$$\delta\beta = 2g'_R m_R \int_0^\Lambda \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{q^2 + m_R^2}} \quad (194)$$

$$\begin{aligned} \delta M^2 = & -\frac{\lambda_R}{12} \int_0^\Lambda \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{q^2 + M_R^2}} + \frac{2g_R'^2}{N} \int_0^\Lambda \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{q^2 + m_R^2}} \\ & - \frac{2g_R'^2 m_R^2}{N} \int_0^\Lambda \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{(q^2 + m_R^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (195)$$

$$\delta\gamma = -\frac{6g_R'^3 m_R}{N^2} \int_0^\Lambda \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{(q^2 + m_R^2)^{3/2}} + \frac{6g_R'^3 m_R^3}{N^2} \int_0^\Lambda \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{(q^2 + m_R^2)^{5/2}} \quad (196)$$

$$\begin{aligned} \delta\lambda = & \frac{\lambda_R^2}{4!N_b} \int_0^\Lambda \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{[q^2 + M_\pi^2(\mu)]^{3/2}} - \frac{6g_R'^4 N_b}{N^3} \int_0^\Lambda \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{[q^2 + m_\psi^2(\mu)]^{3/2}} \\ & + \frac{36g_R'^2 m_R^2 N_b}{N^3} \int_0^\Lambda \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{[q^2 + m_\psi^2(\mu)]^{5/2}} \\ & + \frac{30g_R'^4 m_R^4 N_b}{N^3} \int_0^\Lambda \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{[q^2 + m_\psi^2(\mu)]^{7/2}}. \end{aligned} \quad (197)$$

Les expressions (2.135) - (2.138) et (194) - (197) ne diffèrent que par des termes finis dans un développement à grand cut-off. J'ai choisi de donner les formes non intégrées des expressions (194) - (197) car ce sont celles ci qui seront codées dans la simulation numérique à fin d'obtenir une meilleure annulation des termes divergeant.

D'autre part, j'attire l'attention sur le fait que notre régularisation de la théorie, qui consiste à ne régulariser qu'une coordonnée de l'espace *i.e.* la distance, étant donné que l'isotropie nous permet d'intégrer analytiquement les sommes sur les coordonnées angulaires. Cette régularisation n'est pas équivalente à une mise sur réseaux de la théorie qui consiste à régulariser les trois direction de l'espace. Il ne serait pas étonnant donc de trouver un terme qui diverge linéairement avec le cut-off dans le membre de droite des équations du mouvement qui à ce stade ne sont pas renormalisées.

expression de δZ

Pour calculer le contre-terme δZ il faut calculer la fonction à deux points à partir de la dérivées seconde de l'action effective (2.128) par rapport au champs ϕ .

$$\begin{aligned} iG^{\perp,-1}(x, y) &= \left[\frac{\delta^2 \Gamma[\phi, G_{\text{cl}}^{\perp}, D_{\text{cl}}]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \right]_{\phi=cte} \\ &= - \left[(1 + \delta Z) \square_x + M_R^2 + \delta M^2 + \delta \gamma \phi + \frac{\lambda_R + \delta \lambda}{2N_b} \phi^2 \right] \delta(x - y) - i\Sigma_{vac}(x, y) \end{aligned} \quad (198)$$

où ici

$$-i\Sigma_{vac}(x, y) = \left[\frac{\delta^2}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \left(\frac{i}{2} \text{TrLn} G_{\text{cl}}^{\perp,-1} - i \text{TrLn} D_{\text{cl}}^{-1} \right) \right]_{\phi=cte} \quad (199)$$

$$-i\Sigma_{vac}(x, y)|_{\phi=0} = \delta(x - y) \left[-\frac{\lambda_R}{6} G_{\text{cl}}^{\perp}(x, x) - i \frac{g_R'^2}{N} \text{trD} [D_{\text{cl}}(x, y) D_{\text{cl}}(y, x)] \right] \quad (200)$$

est la self-energie à une boucle dans le vide.

Ecrit dans l'espace de fourrier la relation (198) devient

$$iG^{\perp,-1}(p_0; \vec{p}) = (1 + \delta Z) (p_0^2 - \vec{p}^2) - M_R^2 - \delta M^2 - \delta \gamma \phi - \frac{\lambda_R + \delta \lambda}{2N_b} \phi^2 - i\Sigma_{vac}(p_0; \vec{p}) \quad (201)$$

et (200) devient

$$\begin{aligned} -i\Sigma_{vac}(p)|_{\phi=0} &= -\frac{\lambda_R}{6} \int_0^\Lambda \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - M_R^2 + i\epsilon} \\ &\quad - i \frac{g_R'^2}{N} \int_0^\Lambda \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{trD} \left[i \frac{\not{q} + m_R}{q^2 - m_R^2 + i\epsilon} i \frac{\not{q} - \not{p} + m_R}{(q - p)^2 - m_R^2 + i\epsilon} \right]. \end{aligned} \quad (202)$$

En imposant la condition de renormalisation suivante

$$i \left[\frac{d}{d(p_0^2)} G^{\perp,-1}(p_0; \vec{0}) \right]_{p_0=0} = 1 \quad (203)$$

on trouve

$$\delta Z = \left[i \frac{d}{d(p_0^2)} \Sigma_{vac}(p_0; \vec{0}) \right]_{p_0=0}. \quad (204)$$

Pour vérifier la cohérence avec les autres méthodes de calcul des contre-terme, on peut par exemple vérifier qu'en imposant la condition de renormalisation $iG^{\perp,-1}(0; \vec{0}) = M_R^2$ on trouve

$$\delta M^2 = i\Sigma_{vac}(0; \vec{0}). \quad (205)$$

$\Sigma_{vac}(p_0; \vec{0})$ prend la forme

$$\begin{aligned} -i\Sigma_{vac}(p_0; \vec{0})|_{\phi=0} &= -\frac{\lambda_R}{6} \int^{\Lambda_4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - M_R^2 - i\epsilon} \\ &\quad + 4i \frac{g_R'^2}{N} \int^{\Lambda_4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q_0(q_0 - p_0) - \vec{q}^2 + m_R^2}{(q_0^2 - \omega_q^2 + i\epsilon) [(q_0 - p_0)^2 - \omega_q^2 + i\epsilon]} \end{aligned} \quad (206)$$

où $\omega_q^2 = \vec{q}^2 + m_R^2$. En utilisant les relations (204) et (205) on trouve

$$\delta M^2 = -\frac{\lambda_R}{12} \int_0^\Lambda \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\vec{q}^2 + M_\pi^2(\mu)}} + 2\frac{g_R'^2}{N} \int_0^\Lambda \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\vec{q}^2}{[\vec{q}^2 + m_\psi^2(\mu)]^{3/2}} \quad (207)$$

$$\delta Z = -\frac{g_R'^2}{2N} \int_0^\Lambda \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\vec{q}^2}{[\vec{q}^2 + m_\psi^2(\mu)]^{5/2}} \quad (208)$$

dont la partie divergente à grand cut-off redonne bien les expressions trouvées en (2.136) et (195) pour δM^2 et (2.139) pour δZ . Pour éviter une divergence infrarouge des intégrales écrites ci-dessus, on les évalue non plus à $\phi = 0$ mais à $\phi = \mu$. Ceci revient à évaluer $\Sigma_{vac}(x, y)$ à champs non nul, puis de prendre $M_\pi(\phi) = M_\pi(\mu)$ et $m_\psi(\phi) = m_\psi(\mu)$ pour finalement remettre le champ à zéro.

I Preuve $0 \leq N_f(t; k) \leq 1$

Dans cette section je propose une démonstration que l'expression (2.161) établie en section (2.8.2) du chapitre 2 respecte la propriété fondamentale du spectre fermionique : $0 \leq N_f(t; k) \leq 1$. Pour cela j'exprime les opérateurs création et annihilation à partir de l'expression de la fonction d'onde ψ définie en (78). On obtient

$$\hat{a}_{\vec{k},s}^-(t) = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_k(t)}} \bar{u}_{\vec{k},s} \gamma_0 \psi_{\vec{k}}^-(t) \quad (209)$$

$$\hat{b}_{\vec{k},s}^-(t) = \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_k(t)}} \bar{\psi}_{\vec{k}}(t) \gamma_0 v_{\vec{k},s}^- \quad (210)$$

où les spineurs $u_{\vec{k},s}^-$ et $v_{\vec{k},s}^-$ où on a utilisé la normalisation habituelle

$$u_{\vec{k},r}^\dagger u_{\vec{k},s} = 2\epsilon_k \delta_{r,s} \quad (211)$$

$$v_{\vec{k},r}^\dagger v_{\vec{k},s} = 2\epsilon_k \delta_{r,s} \quad (212)$$

$$\bar{u}_{\vec{k},r} v_{\vec{k},s} = \bar{v}_{\vec{k},r} u_{\vec{k},s} = 0 \quad (213)$$

avec $\epsilon_k(t) = \sqrt{k^2 + m_\psi^2(t)}$.

Il est clair que de cette définition on obtient

$$\left\{ \hat{a}_{\vec{k},r}^-(t), \hat{a}_{\vec{k}',s}^\dagger(t) \right\} = \left\{ \hat{b}_{\vec{k},r}^-(t), \hat{b}_{\vec{k}',s}^\dagger(t) \right\} = \left\{ \psi_{\vec{k}}^-(t), \psi_{\vec{k}'}^\dagger(t) \right\} \delta_{r,s} = (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{r,s} \quad (214)$$

ce qui permet de conclure directement que

$$0 \leq \langle \hat{a}_{-\vec{k},s}^\dagger(t) \hat{a}_{\vec{k},s}^-(t) \rangle \equiv 2n_f(t; \vec{k}) \leq 1 \quad (215)$$

$$0 \leq \langle \hat{b}_{\vec{k},s}^\dagger(t) \hat{b}_{-\vec{k},s}^-(t) \rangle \equiv 2\bar{n}_f(t; \vec{k}) \leq 1 \quad (216)$$

étant donné que le spectre d'un opérateur ayant pour relation d'anticommutation celle de la relation (214) est fatalement 0 ou 1. De là on conclue que le nombre de fermions défini par $N_f(t; \vec{k}) = \frac{\bar{n}_f(t; \vec{k}) + n_f(t; \vec{k})}{2}$ est borné par 0 et 1 également.

On peut également montrer que partant des relations (209) et (210) et des définitions $n_f(t; \vec{k})$ et $\bar{n}_f(t; \vec{k})$ on retrouve l'expression du nombre de fermions (2.161). Ce raisonnement permet de conclure que l'expression (2.161) est bornée entre 0 et 1 comme le veut le blocus de Pauli.

J Rotation de Bogolubov et phase ϕ_k

Dans cette section je montre comment une simple rotation de Bogolubov est relié à la phase ϕ_k introduite dans les équations (3.43) à (3.45) de la section (3.3) du chapitre 3. Premièrement, nous allons nous affranchir de l'indice k et tout établir la relation entre ϕ et θ , l'angle de la rotation de Bogolubov.

Soit une matrice densité D définie par

$$D = \exp \alpha \left[F \pi^\dagger \pi + K \varphi^\dagger \varphi + R \left(\pi^\dagger \varphi + \varphi^\dagger \pi \right) \right] \quad (217)$$

où α est un nombre réel quelconque, et F,K,R les fonctions de corrélation définies par

$$F = \langle \varphi^\dagger \varphi \rangle \quad (218)$$

$$R = \frac{1}{2} \langle \varphi^\dagger \pi + \pi \varphi^\dagger \rangle \quad (219)$$

$$K = \langle \pi^\dagger \pi \rangle. \quad (220)$$

Dans l'espace des phases repéré par la base²⁵ $\mathcal{B} = (\tilde{\varphi}, \tilde{\pi})$, cette matrice densité est représenté par une distribution gaussienne à deux dimensions, centrée en $(\varphi = 0, \pi = 0)$. On peut voir le "contour" de la gaussienne (lieu des points situés à la cote $1 - \frac{1}{e}$) est alors une ellipse centrée en O , de demi-axe $\sqrt{\alpha F}$ et $\sqrt{\alpha K}$. Le corrélateur R mesure la corrélation qui existe entre φ et π . En quelque sorte, il est responsable de de l'angle que fait le grand axe de l'ellipse avec l'axe $\pi = 0$. Autrement dit, on sait où se situe un point de l'espace des phase en connaissant qu'une seule variable et la corrélation qu'existe entre les deux.

Soit une base $\mathcal{B}' = (\tilde{\varphi}', \tilde{\pi}')$. On choisit cette base pour être celle qui diagonalise l'exposant de la matrice densité D . Dans cette base, les axes de l'ellipse correspondante sont confondus avec les axes de la base. Il s'agit donc de construire une base où la corrélation en φ' et π' est nulle. Cherchons donc quel est l'angle de rotation que nous devons choisir pour exprimer D dans une base diagonale. Soit θ cet angle, nous pouvons alors exprimer notre souhait de la façon suivante

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}' \\ \tilde{\pi}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\pi} \end{pmatrix}. \quad (221)$$

Dans la base \mathcal{B}' , la matrice densité s'exprime comme

$$\begin{aligned} D = \exp \alpha \bigg\{ & \left(\tilde{F} \cos^2 \theta + \tilde{K} \sin^2 \theta - 2R \sin \theta \cos \theta \right) \tilde{\pi}'^\dagger \pi' \\ & + \left(\tilde{K} \cos^2 \theta + \tilde{F} \sin^2 \theta + 2R \sin \theta \cos \theta \right) \tilde{\varphi}'^\dagger \varphi' \\ & + \left[\left(\tilde{F} - \tilde{K} \right) \sin \theta \cos \theta + R \left(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta \right) \right] \left(\tilde{\pi}'^\dagger \tilde{\varphi}' + \tilde{\varphi}'^\dagger \tilde{\pi}' \right) \bigg\} \end{aligned} \quad (222)$$

²⁵Où $\tilde{\varphi} \equiv \varphi \sqrt{\epsilon}$ et $\tilde{\pi} \sqrt{\epsilon} \equiv \pi$.

où $\epsilon\tilde{F} \equiv F$ et $\tilde{K} \equiv \epsilon K$.

Cette base est construite de telle sorte que la corrélation entre φ' et π' soit nulle. On veut donc que

$$(\tilde{F} - \tilde{K}) \sin \theta \cos \theta + R (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0. \quad (223)$$

En y utilisant la paramétrisation de F, K et R introduite dans les équations (3.43) à (3.45) de la section (3.3) du chapitre 3 on trouve aisément

$$\tan 2\theta = -\tan \phi \quad (224)$$

et si on se restreint à des angles telles que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ alors on trouve

$$\theta = -\frac{\phi}{2} \quad (225)$$

où $-\pi \leq \phi \leq 0$.

Dans le cas de la théorie libre développée au paragraphe E de cette annexe nous obtenons²⁶

$$F(t, t'; k) = \frac{n_k + \frac{1}{2}}{2\epsilon_k \sqrt{1 - \gamma^2}} \gamma \sin [2\phi_k + \epsilon_k(t + t')] + \frac{n_k + \frac{1}{2}}{\epsilon_k \sqrt{1 - \gamma^2}} \cos [\epsilon_k(t + t')] \quad (226)$$

où n_k est la distribution de particules au temps initial, et où $\epsilon_k = \sqrt{k^2 + M^2}$ est l'énergie des particules du mode k . Ce que nous voyons sur cette expression de F c'est que, pris à temps égaux $t' = t$, l'évolution temporelle du système ne peut se distinguer d'une simple rotation de Bogolubov des champs (φ_k, π_k) , d'angle $2\epsilon_k t$. En d'autre terme, l'action de l'opérateur évolution, consiste à "faire tourner" l'ellipse représentative de la matrice densité (par mode) initiale sans la déformer à la vitesse angulaire ϵ_k , différente pour chaque mode.

L'angle ϕ_k ne change en rien la vitesse angulaire de la rotation. Ce n'est qu'une constante qui renseigne sur la "position" initiale du système et qui ne joue aucun rôle sur la dynamique de la théorie libre.

²⁶Il faut remarquer que le champs $\phi(t)$ du paragraphe E et la phase ϕ_k dont il est question dans ce paragraphe sont deux quantités déconnectées.

Bibliographie

- [1] Alan H. Guth. The Inflationary Universe : A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems. *Phys. Rev.*, D23 :347–356, 1981.
- [2] Viatcheslav F. Mukhanov. Inflation : Homogeneous limit. arXiv astro-ph/0511570, 2005.
- [3] Renaud Parentani. The inflationary paradigm : Predictions for CMB. arXiv astro-ph/0404022, 2004.
- [4] Andrei D. Linde. A New Inflationary Universe Scenario : A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems. *Phys. Lett.*, B108 :389–393, 1982.
- [5] Alexei A. Starobinsky. A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Phys. Lett.*, B91 :99–102, 1980.
- [6] M. A. Markov and Viatcheslav F. Mukhanov. ON THE PROBLEMS OF A VERY EARLY UNIVERSE. *Phys. Lett.*, A104 :200–203, 1984.
- [7] D. Linde, Andrei. *Particle Physics and Inflationary Cosmology*. Switzerland, harwood, chur edition, 1990.
- [8] W. Kolb, E. and S. Turner, M. *The Early Universe*. California, addison-wesley, redwood city edition, 1990.
- [9] D. Boyanovsky, H. J. de Vega, and R. Holman. Erice lectures on inflationary reheating. arXiv hep-ph/9701304, 1996.
- [10] David Polarski and Alexei A. Starobinsky. Semiclassicality and decoherence of cosmological perturbations. *Class. Quant. Grav.*, 13 :377–392, 1996.
- [11] J. Lesgourgues, David Polarski, and Alexei A. Starobinsky. Quantum-to-classical transition of cosmological perturbations for non-vacuum initial states. *Nucl. Phys.*, B497 :479–510, 1997.
- [12] David Campo and Renaud Parentani. Inflationary spectra and partially decohered distributions. *Phys. Rev.*, D72 :045015, 2005.
- [13] David Campo and Renaud Parentani. Decoherence and entropy of primordial fluctuations. I : Formalism and interpretation. *Phys. Rev.*, D78 :065044, 2008.
- [14] David Campo and Renaud Parentani. Decoherence and entropy of primordial fluctuations II. The entropy budget. *Phys. Rev.*, D78 :065045, 2008.
- [15] W. H. Zurek. Pointer Basis of Quantum Apparatus : Into What Mixture Does the Wave Packet Collapse? *Phys. Rev.*, D24 :1516–1525, 1981.
- [16] W. G. Unruh and W. H. Zurek. Reduction of a Wave Packet in Quantum Brownian Motion. *Phys. Rev.*, D40 :1071, 1989.
- [17] C. Giunti. Neutrino wave packets in quantum field theory. *JHEP*, 11 :017, 2002.

- [18] Berndt Muller and Andreas Schafer. The decoherence time in high energy heavy ion collisions. *Phys. Rev.*, C73 :054905, 2006.
- [19] G. G. Raffelt and G. Sigl. Self-induced decoherence in dense neutrino gases. *Phys. Rev.*, D75 :083002, 2007.
- [20] George M. Fuller and Chad T. Kishimoto. Quantum Coherence of Relic Neutrinos. *Phys. Rev. Lett.*, 102 :201303, 2009.
- [21] Lev Kofman, Andrei D. Linde, and Alexei A. Starobinsky. Reheating after inflation. *Phys. Rev. Lett.*, 73 :3195–3198, 1994.
- [22] Greg W. Anderson, Andrei D. Linde, and Antonio Riotto. Preheating, supersymmetry breaking and baryogenesis. *Phys. Rev. Lett.*, 77 :3716–3719, 1996.
- [23] Patrick B. Greene, Lev Kofman, Andrei D. Linde, and Alexei A. Starobinsky. Structure of resonance in preheating after inflation. *Phys. Rev.*, D56 :6175–6192, 1997.
- [24] Lev Kofman, Andrei D. Linde, and Alexei A. Starobinsky. Towards the theory of reheating after inflation. *Phys. Rev.*, D56 :3258–3295, 1997.
- [25] Gary N. Felder, Lev Kofman, and Andrei D. Linde. Instant preheating. *Phys. Rev.*, D59 :123523, 1999.
- [26] Patrick B. Greene and Lev Kofman. Preheating of fermions. *Phys. Lett.*, B448 :6–12, 1999.
- [27] Patrick B. Greene and Lev Kofman. On the theory of fermionic preheating. *Phys. Rev.*, D62 :123516, 2000.
- [28] D. Boyanovsky, H. J. de Vega, and R. Holman. Nonequilibrium evolution of scalar fields in FRW cosmologies I. *Phys. Rev.*, D49 :2769–2785, 1994.
- [29] D. Boyanovsky, H. J. de Vega, R. Holman, and J. F. J. Salgado. Analytic and numerical study of preheating dynamics. *Phys. Rev.*, D54 :7570–7598, 1996.
- [30] D. Boyanovsky, D. Cormier, H. J. de Vega, and R. Holman. Out of equilibrium dynamics of an inflationary phase transition. *Phys. Rev.*, D55 :3373–3388, 1997.
- [31] D. Boyanovsky, D. Cormier, H. J. de Vega, R. Holman, and S. P. Kumar. Non-perturbative quantum dynamics of a new inflation model. *Phys. Rev.*, D57 :2166–2185, 1998.
- [32] Jurgen Baacke and Carsten Patzold. Out-of-equilibrium evolution of scalar fields in FRW cosmology : Renormalization and numerical simulations. *Phys. Rev.*, D61 :024016, 2000.
- [33] Ali Kaya. Fluctuations of Quantum Fields in a Classical Background and Reheating. arXiv hep-th/0909.2712, 2009.
- [34] Ali Akbar Abolhasani, Hassan Firouzjahi, and M. M. Sheikh-Jabbari. Tachyonic Resonance Preheating in Expanding Universe. arXiv hep-th/0912.1021, 2009.
- [35] S. Yu. Khlebnikov and I. I. Tkachev. Classical decay of inflaton. *Phys. Rev. Lett.*, 77 :219–222, 1996.
- [36] Tomislav Prokopec and Thomas G. Roos. Lattice study of classical inflaton decay. *Phys. Rev.*, D55 :3768–3775, 1997.
- [37] Brian R. Greene, Tomislav Prokopec, and Thomas G. Roos. Inflaton decay and heavy particle production with negative coupling. *Phys. Rev.*, D56 :6484–6507, 1997.
- [38] Juan Garcia-Bellido and Andrei D. Linde. Preheating in hybrid inflation. *Phys. Rev.*, D57 :6075–6088, 1998.

- [39] Gary N. Felder et al. Dynamics of symmetry breaking and tachyonic preheating. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :011601, 2001.
- [40] Gary N. Felder and Lev Kofman. The development of equilibrium after preheating. *Phys. Rev.*, D63 :103503, 2001.
- [41] Dmitry I. Podolsky, Gary N. Felder, Lev Kofman, and Marco Peloso. Equation of state and beginning of thermalization after preheating. *Phys. Rev.*, D73 :023501, 2006.
- [42] Jean Francois Dufaux, Gary N. Felder, L. Kofman, M. Peloso, and D. Podolsky. Preheating with Trilinear Interactions : Tachyonic Resonance. *JCAP*, 0607 :006, 2006.
- [43] Diana Battefeld, Thorsten Battefeld, and John T. Giblin. On the Suppression of Parametric Resonance and the Viability of Tachyonic Preheating after Multi-Field Inflation. *Phys. Rev.*, D79 :123510, 2009.
- [44] Jurgen Berges. Controlled nonperturbative dynamics of quantum fields out of equilibrium. *Nucl. Phys.*, A699 :847–886, 2002.
- [45] Gert Aarts, Daria Ahrensmeier, Rudolf Baier, Jurgen Berges, and Julien Serreau. Far-from-equilibrium dynamics with broken symmetries from the 2PI-1/N expansion. *Phys. Rev.*, D66 :045008, 2002.
- [46] Jurgen Berges and Julien Serreau. Progress in nonequilibrium quantum field theory. 2003.
- [47] Jurgen Berges and Julien Serreau. Progress in nonequilibrium quantum field theory. II. 2004.
- [48] Alejandro Arrizabalaga, Jan Smit, and Anders Tranberg. Tachyonic preheating using 2PI - 1/N dynamics and the classical approximation. *JHEP*, 10 :017, 2004.
- [49] Jurgen Berges and Julien Serreau. Parametric resonance in quantum field theory. *Phys. Rev. Lett.*, 91 :111601, 2003.
- [50] Gert Aarts and Anders Tranberg. Thermal effects on inflaton dynamics. *Phys. Rev.*, D77 :123521, 2008.
- [51] Jurgen Berges. What the inflaton might tell us about RHIC/LHC. *Nucl. Phys.*, A820 :65c–73c, 2009.
- [52] Anders Tranberg. Quantum field thermalization in expanding backgrounds. *JHEP*, 11 :037, 2008.
- [53] Jurgen Berges, Jens Pruschke, and Alexander Rothkopf. Instability-induced fermion production in quantum field theory. *Phys. Rev.*, D80 :023522, 2009.
- [54] E. Calzetta and B.L. Hu. *Nonequilibrium quantum field theory*. Cambridge university press edition, 2008.
- [55] Jurjen F. Koksmas, Tomislav Prokopec, and Michael G. Schmidt. Decoherence in an Interacting Quantum Field Theory : The Vacuum Case. 2009.
- [56] J. M. Luttinger and John Clive Ward. Ground state energy of a many fermion system. 2. *Phys. Rev.*, 118 :1417–1427, 1960.
- [57] Gordon Baym. Selfconsistent approximation in many body systems. *Phys. Rev.*, 127 :1391–1401, 1962.
- [58] Cyrano de Dominicis and Paul C. Martin. Stationary Entropy Principle and Renormalization in Normal and Superfluid Systems. I. Algebraic Formulation. *J. Math. Phys.*, 5 :14–30, 1964.

- [59] John M. Cornwall, R. Jackiw, and E. Tomboulis. Effective Action for Composite Operators. *Phys. Rev.*, D10 :2428–2445, 1974.
- [60] R. E. Norton and J. M. Cornwall. On the Formalism of Relativistic Many Body Theory. *Ann. Phys.*, 91 :106, 1975.
- [61] Jurgen Berges, Szabolcs Borsanyi, and Julien Serreau. Thermalization of fermionic quantum fields. *Nucl. Phys.*, B660 :51–80, 2003.
- [62] Jurgen Baacke, Katrin Heitmann, and Carsten Patzold. Nonequilibrium dynamics of fermions in a spatially homogeneous scalar background field. *Phys. Rev.*, D58 :125013, 1998.
- [63] G. F. Giudice, M. Peloso, A. Riotto, and I. Tkachev. Production of massive fermions at preheating and leptogenesis. *JHEP*, 08 :014, 1999.
- [64] Shinji Tsujikawa, Bruce A. Bassett, and Fermin Viniegra. Multi-field fermionic preheating. *JHEP*, 08 :019, 2000.
- [65] Juan Garcia-Bellido, Silvia Mollerach, and Esteban Roulet. Fermion production during preheating after hybrid inflation. *JHEP*, 02 :034, 2000.
- [66] Marco Peloso and Lorenzo Sorbo. Preheating of massive fermions after inflation : Analytical results. *JHEP*, 05 :016, 2000.
- [67] T. Prokopec and Richard P. Woodard. Production of Massless Fermions during Inflation. *JHEP*, 10 :059, 2003.
- [68] Mathias Garny and Markus Michael Muller. Kadanoff-Baym Equations with Non-Gaussian Initial Conditions : The Equilibrium Limit. *Phys. Rev.*, D80 :085011, 2009.
- [69] Bjorn Garbrecht, Tomislav Prokopec, and Michael G. Schmidt. Particle number in kinetic theory. *Eur. Phys. J.*, C38 :135–143, 2004.
- [70] Jurgen Baacke, Katrin Heitmann, and Carsten Patzold. Nonequilibrium dynamics : Preheating in the SU(2) Higgs model. *Phys. Rev.*, D55 :7815–7825, 1997.
- [71] Daniel G. Figueroa. Preheating the Universe from the Standard Model Higgs. 2009.
- [72] Alexandre Giraud and Julien Serreau. Nonlinear dynamics of fermions during preheating. *Nuclear Physics A*, 820(1-4) :215c – 218c, 2009. Strong and Electroweak Matter - Proceedings of the 8th International Conference on Strong and Electroweak Matter 2008.
- [73] Gert Aarts, Nathan Laurie, and Anders Tranberg. Effective convergence of the 2PI-1/N expansion for nonequilibrium quantum fields. *Phys. Rev.*, D78 :125028, 2008.
- [74] Yu. L. Dokshitzer. Perturbative QCD for beginners. Prepared for Cargese Summer School on QCD Perspectives on Hot and Dense Matter, Cargese, France, 6-18 Aug 2001.
- [75] G. Fejos, A. Patkos, and Zs. Szep. Renormalisability of the 2PI-Hartree approximation of multicomponent scalar models in the broken symmetry phase. *Nucl. Phys.*, A803 :115–135, 2008.
- [76] Hendrik van Hees and Joern Knoll. Renormalization in self-consistent approximations schemes at finite temperature. I : Theory. *Phys. Rev.*, D65 :025010, 2002.
- [77] Hendrik Van Hees and Joern Knoll. Renormalization of self-consistent approximation schemes. II : Applications to the sunset diagram. *Phys. Rev.*, D65 :105005, 2002.
- [78] Hendrik van Hees and Joern Knoll. Renormalization in self-consistent approximation schemes at finite temperature. III : Global symmetries. *Phys. Rev.*, D66 :025028, 2002.

- [79] Jean-Paul Blaizot, Edmond Iancu, and Urko Reinosa. Renormalization of phi-derivable approximations in scalar field theories. *Nucl. Phys.*, A736 :149–200, 2004.
- [80] Jean-Paul Blaizot, Edmond Iancu, and Urko Reinosa. Renormalizability of Phi-derivable approximations in scalar ϕ^4 theory. *Phys. Lett.*, B568 :160–166, 2003.
- [81] G. Fejos, A. Patkos, and Zs. Szep. Renormalized Phi-functionals for the $O(N)$ model at next- to-leading order of the $1/N$ expansion. *Phys. Rev.*, D80 :025015, 2009.
- [82] J. Berges, Sz. Borsanyi, U. Reinosa, and J. Serreau. Renormalized thermodynamics from the 2PI effective action. *Phys. Rev.*, D71 :105004, 2005.
- [83] Juergen Berges, Szabolcs Borsanyi, Urko Reinosa, and Julien Serreau. Nonperturbative renormalization for 2PI effective action techniques. *Annals Phys.*, 320 :344–398, 2005.
- [84] Fred Cooper, John F. Dawson, and Bogdan Mihaila. Renormalized broken-symmetry Schwinger-Dyson equations and the 2PI- $1/N$ expansion for the $O(N)$ model. *Phys. Rev.*, D71 :096003, 2005.
- [85] Jurgen Berges and Gabriele Hoffmeister. Nonthermal fixed points and the functional renormalization group. *Nucl. Phys.*, B813 :383–407, 2009.
- [86] A. Patkos and Zs. Szep. Counterterm resummation for 2PI-approximation in constant background. *Nucl. Phys.*, A811 :329–352, 2008.
- [87] Jurgen Baacke and Carsten Patzold. Renormalization of the nonequilibrium dynamics of fermions in a flat FRW universe. *Phys. Rev.*, D62 :084008, 2000.
- [88] Urko Reinosa. Nonperturbative renormalization of Phi-derivable approximations in theories with fermions. *Nucl. Phys.*, A772 :138–166, 2006.
- [89] Urko Reinosa and Julien Serreau. 2PI effective action for gauge theories : Renormalization. *JHEP*, 07 :028, 2006.
- [90] U. Reinosa and J. Serreau. 2PI functional techniques for gauge theories : QED. 2009.
- [91] Wojciech Hubert Zurek. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. *Rev. Mod. Phys.*, 75 :715–775, 2003.
- [92] Robert Graham. Decoherence of bose-einstein condensates in traps at finite temperature. *Phys. Rev. Lett.*, 81(24) :5262–5265, Dec 1998.
- [93] Thomas Gorin, Carlos Pineda, and Thomas H. Seligman. Decoherence of an n -qubit quantum memory. *Phys. Rev. Lett.*, 99(24) :240405, Dec 2007.
- [94] Stephen D. H. Hsu and David Reeb. Black holes, information and decoherence. *Phys. Rev.*, D79 :124037, 2009.
- [95] Robert H. Brandenberger, Viatcheslav F. Mukhanov, and T. Prokopec. Entropy of a classical stochastic field and cosmological perturbations. *Phys. Rev. Lett.*, 69 :3606–3609, 1992.
- [96] Robert H. Brandenberger, T. Prokopec, and Viatcheslav F. Mukhanov. The Entropy of the gravitational field. *Phys. Rev.*, D48 :2443–2455, 1993.
- [97] David Polarski and Alexei A Starobinsky. Semiclassicality and decoherence of cosmological perturbations. *Classical and Quantum Gravity*, 13(3) :377–391, 1996.
- [98] Charis Anastopoulos. Frequently Asked Questions about Decoherence. *Int. J. Theor. Phys.*, 41 :1573–1590, 2002.
- [99] Fernando Lombardo and Francisco D. Mazzitelli. Coarse graining and decoherence in quantum field theory. *Phys. Rev.*, D53 :2001–2011, 1996.

- [100] F. C. Lombardo, F. D. Mazzitelli, and R. J. Rivers. Decoherence after a phase transition. *Phys. Lett.*, B523 :317–322, 2001.
- [101] Salman Habib, Yuval Kluger, Emil Mottola, and Juan Pablo Paz. Dissipation and Decoherence in Mean Field Theory. *Phys. Rev. Lett.*, 76 :4660–4663, 1996.
- [102] R. Balian. Incomplete descriptions and relevant entropies . *American Journal of Physics*, 67(12) :1078–1090, December 1999.
- [103] R. Balian. Erratum : “Incomplete descriptions and relevant entropies” [Am. J. Phys. 67 (12), 1078-1090 (1999)]. *American Journal of Physics*, 68 :1060–1060, November 2000.
- [104] Tomislav Prokopec and Gerasimos I. Rigopoulos. Decoherence from Isocurvature Perturbations in Inflation. *JCAP*, 0711 :029, 2007.
- [105] Matti Herranen, Kimmo Kainulainen, and Pyry Matti Rahkila. Kinetic theory for scalar fields with nonlocal quantum coherence. *JHEP*, 05 :119, 2009.
- [106] Matti Herranen, Kimmo Kainulainen, and Pyry Matti Rahkila. Towards a kinetic theory for fermions with quantum coherence. *Nucl. Phys.*, B810 :389–426, 2009.
- [107] Jurjen F. Koksma, Tomislav Prokopec, and Michael G. Schmidt. Entropy and Correlators in Quantum Field Theory. 2010.
- [108] Fred Cooper, Salman Habib, Yuval Kluger, and Emil Mottola. Nonequilibrium dynamics of symmetry breaking in $\lambda \Phi^4$ field theory. *Phys. Rev.*, D55 :6471–6503, 1997.
- [109] Gert Aarts and Jurgen Berges. Classical aspects of quantum fields far from equilibrium. *Phys. Rev. Lett.*, 88 :041603, 2002.
- [110] Bogdan Mihaila, Tara Athan, Fred Cooper, John Dawson, and Salman Habib. Exact and approximate dynamics of the quantum mechanical $O(N)$ model. *Phys. Rev.*, D62 :125015, 2000.
- [111] Alexandre Giraud and Julien Serreau. Decoherence and thermalization of a pure quantum state in quantum field theory. arXiv hep-ph/0910.2570, 2009.
- [112] Szabolcs Borsanyi and Urko Reinosa. Renormalised nonequilibrium quantum field theory : scalar fields. *Phys. Rev.*, D80 :125029, 2009.
- [113] F. Cooper and E. Mottola. Initial-value problems in quantum field theory in the large- N approximation. *Phys. Rev.*, *year* =.